

DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MECÁNICA Y FABRICACIÓN

ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIEROS INDUSTRIALES

UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE MADRID

TESIS DOCTORAL

**MODELIZACIÓN GENERALIZADA DE RESORTES ESPIRALES
A TORSIÓN.
APLICACIÓN EN ALMACENAMIENTO DE ENERGÍA.**

D. Daniel Fernández Caballero

Ingeniero Industrial

Universidad Politécnica de Madrid

2011

DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MECÁNICA Y FABRICACIÓN

ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIEROS INDUSTRIALES

UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE MADRID

TESIS DOCTORAL

MODELIZACIÓN GENERALIZADA DE RESORTES ESPIRALES A TORSIÓN. APLICACIÓN EN ALMACENAMIENTO DE ENERGÍA.

Autor: D. Daniel Fernández Caballero

Ingeniero Industrial por la Universidad Politécnica de Madrid

Director de Tesis: D. Juan Manuel Muñoz Guijosa

Dr. Ingeniero Industrial por la Universidad Politécnica de Madrid

2011

TRIBUNAL

Tribunal nombrado por el Magfco. y Excmo. Sr. Rector de la Universidad Politécnica de Madrid, el día
de de 2011.

Presidente: Dr. Emilio Bautista Paz

Vocal: Dr. Vicente Díaz López

Vocal: Dr. Julio Fuentes Losa

Vocal: Dr. Carlos Sancho de Mingo

Secretario: Dr. Jose Luis Muñoz Sanz

Suplente: Dr. Faustino Mujika Garitano

Suplente: Dra. Ester Olmeda Santamaría

Realizado el acto de defensa y lectura de la tesis el día deEnero..... de 2012 en la E.T.S. Ingenieros
Industriales.

CALIFICACIÓN:

EL PRESIDENTE

LOS VOCALES

EL SECRETARIO

Agradecimientos

Gracias a aquellos que me han enseñado a amar y a ser feliz, a vivir.

El desarrollo de una Tesis Doctoral es un largo proceso en el que lo importante, no es únicamente el resultado alcanzado, sino el proceso científico - personal llevado a cabo para alcanzar dicho fin. Durante ese largo periodo, no son pocos los momentos en los que las fuerzas flojean y más aún cuando no existe avance alguno. Son estos en los que más se aprecian el ánimo de continuar y no desaprovechar tantas horas invertidas.

Durante todo este tiempo, ha sido esencial la División de Ingeniería de Máquinas, con su catedrático al frente, por apostar por un desarrollo que no tiene relación alguna con mi actividad diaria y a mi Director por mostrarme como se debe investigar y lo más importante como no hacerlo. En dicha División durante estos años he podido conocer a unos cuantos compañeros, algunos de los cuales, pasados los años, son buenos amigos. Con ellos he estado trabajando codo a codo, y gracias a ellos en gran parte, he podido finalizar esta Tesis Doctoral.

Para una persona que está trabajando son un factor igual de importante, los compañeros laborales (algunos grandes amigos), que conocen las noches de desvelo y trabajo y soportan los malos humos cuando se ha dormido poco. Su compañía y consejos han sido de vital importancia. De ellos he aprendido grandes lecciones en la vida, gracias por ser fieles y leales, tanto a mí como a vosotros mismos.

Finalmente y no menos importante está mi “gran familia”, que ha aceptado, aunque algunas veces no ha compartido mis decisiones, pero ha estado todos estos largos años. Mis padres, mis abuelos... y mis amigos. Gracias a todos y cada uno de ellos.

“Je ne suis paas d’accord avec toi, mais je te laisse faire par respect des différences”
Voltaire

“Si pudiéramos enumerar cuánto debemos a los demás, no nos quedaría mucho en propiedad”
Goethe

"Somos una admirable Numancia errante que prefiere morir gradualmente a darse por vencida"
Luis Araquistain

ÍNDICE

Resumen 1

Abstract 1

Capítulo 1.- INTRODUCCIÓN..... 1

1.1.- Marco de la investigación..... 1

1.1.1.- Universidad Politécnica de Madrid. División de Ingeniería de Máquinas..... 1

1.1.2.- Proyectos de investigación relacionados..... 2

1.2.- Justificación..... 4

1.3.- Objetivos..... 5

1.3.1.- Importancia industrial..... 5

1.4.- Contenido..... 7

1.5.- Metodología de investigación empleada..... 9

1.6.- Sistemas de almacenamiento. Propuesta de almacenamiento elástico de energía..... 12

Capítulo 2.- RESORTES ESPIRALES A TORSIÓN. ANTECEDENTES Y APLICACIONES..... 15

2.1.- Resortes de alta variabilidad de par..... 17

2.2.- Resortes de baja variabilidad de par..... 22

Capítulo 3.- MODELO GENERALIZADO DE RESORTES ESPIRALES A TORSIÓN..... 29

3.1.- Modelización del comportamiento estático de los resortes espirales a torsión..... 29

3.1.1.- Factores de influencia para resortes con flejes de rigidez a flexión constante..... 33

3.1.2.- Influencia de la variación de la rigidez a flexión sobre el comportamiento del resorte.... 44

3.2.- Conceptualización del procedimiento de diseño..... 46

3.2.1.- Obtención analítica de la variación de los ángulos girados y de su pendiente con el par.	54
3.2.2.- Consideraciones de la influencia del espesor de la espira sobre la curva característica....	58
3.2.3.- Análisis de otros parámetros de diseño.	63
3.3.- Enfoque energético.	71
3.3.1.- Cálculo mediante análisis energético de la curva característica.	74
3.3.2.- Cálculo mediante análisis energético de la fuerza entre resorte y fleje.	75

Capítulo 4.- ESTUDIO ANALÍTICO. CASO PARTICULAR DE RESORTES CON CURVA GENERATRIZ CLOTOIDAL Y VARIACIÓN DE LA RIGIDEZ A FLEXIÓN CON LA LONGITUD.	79
4.1.- Modelo de resortes con curva generatriz clotoidal y variación de la rigidez a flexión con la longitud.	79
4.2.- Procedimiento de diseño específico para este tipo de resortes.	87
4.3.- Adimensionalización de parámetros de diseño.	89
4.4.- Cuantificación de la comparación entre resortes con y sin bloqueo de espiras.	91
4.5.- Caso particular de curvatura de fabricación clotoidal con curvatura en los extremos igual a la de la carcasa y el árbol.	93
4.6.- Análisis de tensiones en el fleje. Sólido de igual resistencia.	95
4.7.- Condiciones de resistencia de la espira.	101
4.7.1.- Resistencia a torsión del árbol.	103
4.7.2.- Resistencia de la espira en la unión al árbol y a la carcasa.	103
4.7.3.- Resistencia a flexión de la espira.	103
4.7.4.- Condición de holgura entre espiras.	105

Capítulo 5.- EJEMPLOS DE DISEÑO CON MODELO Y METODOLOGÍA PROPUESTOS.....	107
5.1.- Diseño de resorte espiral a torsión de alta variabilidad de par.	107
5.2.- Diseño de resorte espiral a torsión con baja variabilidad del par.	115
Capítulo 6.- MATERIALES EMPLEADOS. OPTIMIZACIÓN DEL FLEJE.	121
6.1.- Optimización del espacio ocupado. Configuraciones serie y paralelo.	121
6.2.- Optimización de la sección resistente del fleje.....	123
6.2.1.- Empleo de materiales compuestos para la fabricación del fleje del resorte.	125
6.3.- Optimización del cambio de curvatura.	128
6.4.- Optimización del espacio ocupado en fabricación. Cambio de curvatura inicial y final....	129
Capítulo 7.- VALIDACIÓN EXPERIMENTAL.....	131
7.1.- Prototipo de bajo nivel.....	131
7.2.- Resorte espiral a torsión de baja variabilidad del par.	133
7.2.1.- Simulación mediante elementos finitos.....	134
7.2.2.- Fabricación.....	136
7.2.3.- Diseño de la instalación de ensayos para validación del modelo.....	137
7.2.4.- Diseño y planificación de ensayos.	142
7.3.- Resorte espiral a torsión de alta variabilidad de par.	152
7.3.1.- Ensayos del resorte.....	154
7.3.2.- Aplicación del método analítico de resortes espirales a torsión. Método inverso de resolución.	156

7.3.3.- Validación del modelo analítico para la obtención de la variación del par y de su pendiente.	159
7.3.4.- Cálculo de la deformación carcasa – fleje mediante el método energético.	161
7.4.- Conclusiones de los ensayos.	162
Capítulo 8.- CONCLUSIONES Y LINEAS FUTURAS DE DESARROLLO.	165
8.1.- Cumplimiento de los objetivos.	165
8.2.- Análisis de aportaciones. Importancia industrial.	166
8.3.- Líneas futuras de investigación y desarrollo.	167
8.4.- Aportaciones científicas del autor durante el periodo de investigación.	168
8.4.1.- Artículos.	168
8.4.2.- Patentes.	169
8.4.3.- Proyectos de investigación	169
8.4.4.- Ponencias en congresos y jornadas.	169
8.4.5.- Proyectos fin de carrera	170
REFERENCIAS.	173
LISTA DE TABLAS	181
LISTA DE FIGURAS	182
ABREVIATURAS Y ACRÓNIMOS.	187

Resumen

Las necesidades energéticas actuales requieren una transformación de las técnicas eficaces en eficientes tanto en producción, transporte como consumo energético. Estas necesidades han impulsado nuevos desarrollos en el ámbito energético, entre los que se encuentran los sistemas de almacenamiento de energía. El avance en ingeniería de materiales hace pensar en la posibilidad del almacenamiento mediante deformación elástica de resortes espirales a torsión. Para ello es necesario estudiar metodológicamente en profundidad este tipo de resortes, así como las posibles vías de optimizar sus características. Hasta la fecha han sido escasos los desarrollos al respecto.

Se realiza un análisis de los resorte espiral a torsión, como el elemento constitutivo básico del sistema de almacenamiento; estudiando los diferentes factores de influencia sobre su curva de comportamiento: longitud del fleje, geometría de la espiral de fabricación, variación de la rigidez a flexión a lo largo de la longitud, características de la sección resistente del fleje, espesor del fleje... La selección correcta de dichos parámetros posibilita modular la relación entre el par y el ángulo girado, permitiendo obtener curvas características tanto de baja como de alta variabilidad del par.

Se plantea el procedimiento general de diseño en función de la curva de par requerida y de las restricciones establecidas, para cualquier tipo de resorte espiral a torsión, así como uno específico para los resortes clotoïdales. Se establece un procedimiento para el caso de tener como variable de diseño el espesor del fleje, comprobándose la coherencia entre ambos en el límite de validez. El procedimiento se ve complementado con un análisis energético del resorte tanto en reposo como en el proceso de deformación con el par aplicado.

Existe un caso de estudio particular, los resortes cuya curva generatriz es una espiral clotoïdal (curvatura dependiente de la longitud) con variación del módulo resistente a flexión a lo largo de la longitud de forma inversamente proporcional a la misma. La importancia de este caso radica en la posibilidad de realizar un estudio analítico de su comportamiento, tanto de la curva característica par - ángulo girado, como de la influencia de parámetros de diseño, tensiones en el fleje, condiciones de resistencia o bloqueo de espiras.

El planteamiento y estudio, requiere de la validación experimental. Se diseñan dos resortes espirales a torsión, uno de baja variabilidad del par, con variación de la rigidez a flexión a lo largo de la longitud y otro de alta variabilidad del par y rigidez a flexión constante. Ambos resortes son fabricados en fibra de vidrio con matriz epoxy debido a su alta tensión admisible respecto al módulo elástico y su baja densidad (alta capacidad de almacenamiento de energía). Para ambos casos se realiza tanto el diseño de la instalación como

del plan de ensayos y sistemas de adquisición de datos. Los ensayos llevados a cabo indican la alta correlación entre el modelo teórico y el experimental, aunque dejan patente la necesidad de tener en cuenta el espesor del fleje en el modelo y la necesidad de procesos de fabricación que proporcionen unas características geométricas y resistivas con baja variabilidad.

El análisis general planteado se complementa con la optimización del resorte, tanto en la sección resistente (como es el caso de sólido de igual resistencia) como de las configuraciones de montaje. Se estudia la influencia de la geometría de la sección resistente y de los materiales empleados. Se analizan las posibles configuraciones serie y/o paralelo así como la optimización de periféricos y dimensiones del sistema.

Como futuras líneas de investigación se plantean la validación del modelo energético desarrollado y aumento de la densidad de energía del sistema mediante materiales avanzados o el empleo de secciones resistentes multicomponentes optimizadas.

Septiembre 2011.

Abstract

Energy supply requires effective and also efficient techniques in production, transport and final use. In last years so many energy storage systems have been developed. Major advances in the field of composite materials; show that it can be possible the energy storage by the elastic deformation of a torsion spiral spring. For this reason, a torsion spiral spring analytical study is required; furthermore when practically so few analytical developments exist.

An analytical model is generated to study the different variables affecting the length of the spring strip that can be free or blocked either in the housing or in the shaft. Design parameters are strip length, variation of curvature of the spiral, relation between curvature of shaft and housing and variation of bending stiffness along the spring strip length. There is also a particular design case with a clothoid strip and a linear variation in bending stiffness throughout the length of the strip that leads a torque-shaft rotation curve with a slope as small as required, being the torque variability a design parameter. This design allows a considerable reduction of the torque – shaft rotation angle curve slope over a determined shaft rotation angle at a nominal torque.

According to the application of the spiral spring, different torque - angle characteristic curves are required. So a design process has been developed both for generic characteristic curve and also for clothoid strip. The mathematical spiral torsion spring model has analysed the spring from a mechanical and an energetic point of view.

Two torsion spiral springs have been constructed and tested to validate the models. One of them has a clothoid strip and a variation of its bending stiffness along the length while the other has a constant bending stiffness. Both of them have been manufactured with fiber glass composite and epoxy matrix. Two test benches have also been constructed to validate the model. Tests carried out validate the analytical model with considerable accuracy. However, strip thickness should be taken into account on the model in some cases. The manufactured process has to be improved to reduce the differences between nominal and real strip dimensions.

This work also analyses the optimization of spiral spring weight. Different materials, resistive section shape and serial and parallel configurations are studied to improve it.

September 2011.

Capítulo 1.- INTRODUCCIÓN.

En este capítulo de la Tesis Doctoral se definen los objetivos, principal y secundarios, describiéndose el marco y entorno en el que ha sido desarrollada. Se plantea su estructura explicando someramente el contenido de cada uno de los capítulos en los que ha sido dividida.

1.1.- Marco de la investigación.

La investigación realizada se ha llevado a cabo dentro del Departamento de Ingeniería Mecánica y Fabricación de la Universidad Politécnica de Madrid, más concretamente en la División de Ingeniería de Máquinas. La experimentación práctica, sin embargo, ha sido llevada a cabo tanto en dependencias internas como externas, gracias a acuerdos de colaboración dentro del proyecto Ecotrans del programa C.E.N.I.T., donde se enmarca el proyecto de investigación, mediante la creación de una empresa con participación de profesorado de la División.

1.1.1.- Universidad Politécnica de Madrid. División de Ingeniería de Máquinas.

La Universidad Politécnica de Madrid (U.P.M.) fue fundada en 1971 como agrupación de diversos centros docentes y Escuelas Técnicas adscritas a diferentes organismos. Imparte exclusivamente titulaciones técnicas en la Comunidad de Madrid contando con un total de 43 titulaciones y alrededor de 3.400 profesores que se ocupan de la docencia de unos 35.000 alumnos.

La División de Ingeniería de Máquinas de la Escuela Técnica Superior de Ingenieros Industriales es una de los cuatro grupos de cátedra que constituyen el Departamento de Ingeniería Mecánica y Fabricación de la Universidad Politécnica de Madrid, conjuntamente con el Grupo de Ingeniería Gráfica y Simulación, el Grupo de Ingeniería de Fabricación y la Cátedra de Transportes. Tanto la docencia como la investigación de la División se centran en diferentes aspectos relacionados con el desarrollo de productos, máquinas y mecanismos a lo largo de toda su vida útil. Se incide así en conceptos como diseño, cálculos, fabricación, ensayo, mantenimiento, comportamiento en servicio, análisis de fallos, seguridad y normativa, reciclabilidad... Los objetivos del grupo de Ingeniería de Máquinas son profundizar en distintos aspectos relacionados con la Ingeniería Mecánica, apoyando la resolución de problemas en el ámbito industrial mediante la influencia mutua docencia – investigación – servicios tecnológicos y la participación activa en dichas tareas del alumnado. Las actividades generales, se materializan en diferentes líneas específicas de

investigación, como son, tribología, seguridad y normativa en máquinas, mantenimiento de máquinas, vibraciones y ruido en máquinas, desarrollo de productos, microsistemas, bioingeniería, historia de las máquinas e innovación educativa. Dichas actividades van soportadas en dos laboratorios, uno de ellos de máquinas y mecanismos y el otro de desarrollo de productos. El primero de ellos tiene como fin llevar a cabo ensayos de caracterización, estudios de ruido y vibraciones así como análisis de seguridad, siendo este un laboratorio concertado con A.E.N.O.R., Mientras que el segundo realiza el diseño de productos y obtención de prototipos rápidos, tanto de materiales poliméricos como metálicos, mediante tecnologías de macrosistemas (con técnicas de estereolitografía láser, colada baja vacío o microfusión) y de microsistemas (fotolitografía sin máscara, deposición química o spin coating). En dicho equipo trabajan actualmente siete profesores y otros tantos investigadores o técnicos de apoyo, con la colaboración de una decena de becarios que están realizando sus estudios de ingeniería, master o doctorado.

El proyecto de investigación, en el cual se enmarca la presente Tesis Doctoral, persigue el análisis de resortes espirales a torsión como base para el desarrollo de nuevos sistemas mecánicos de almacenamiento de energía. Se trabaja en colaboración estrecha con empresas del sector privado, principalmente Acumener Investigación y Desarrollo, spin-off creada, entre otros, por profesores de la División de Ingeniería de Máquinas. El acuerdo alcanzado determina que el objetivo de dicha colaboración es el desarrollo completo de resortes espirales a torsión para su utilización como medio de almacenamiento de energía mediante su deformación elástica.

Acumener Investigación y Desarrollo está dedicada a dar soluciones innovadoras, sostenibles y viables a las necesidades energéticas actuales. Dichas necesidades van desde la acumulación y regulación de grandes cantidades de energía, pasando por parques eólicos, donde el viento se aproveche de forma eficiente y rentable, hasta la instalación de proyectos llave en mano para la producción, almacenaje y distribución de hidrógeno mediante energías renovables.

1.1.2.- Proyectos de investigación relacionados.

El desarrollo de esta Tesis Doctoral esta soportado financieramente por varios proyectos, por una parte un proyecto del programa C.E.N.I.T. (Consortios Estratégicos Nacionales de Investigación Técnica) del C.D.T.I. y por otros proyectos P.I.E. de la Comunidad de Madrid.

La tecnología de almacenamiento de energía mediante deformación elástica de resortes espirales a torsión, ha sido incorporada dentro del proyecto del Programa C.E.N.I.T. en el proyecto EcoTrans (Tecnologías Ecológicas para el Transporte urbano, referencia CEN-2008-1007), como vía de financiar su desarrollo e implantación. El proyecto, liderado por Construcciones y Auxiliares de Ferrocarril (C.A.F.),

tiene como principal objetivo desarrollar las tecnologías necesarias para disponer de soluciones de transporte público urbano y de menor impacto ambiental. Las actividades de investigación del proyecto integran nuevas tecnologías de explotación del transporte público, técnicas energéticas, control, climatización, materiales y teoría de vehículos. Dichas tecnologías pueden ser extendidas posteriormente a otros ámbitos del transporte o en otros sectores, como el energético o la construcción.

Los principales aspectos a desarrollar en el proyecto son vehículos guiados, vehículos por carretera, generación, potencia, acumulación, climatización y confort, fiabilidad, seguridad, mantenibilidad y disponibilidad a lo largo de la vida de los productos a desarrollar y explotación. Para afrontar estas diversas actividades se cuenta en el consorcio de dieciocho empresas (tales como C.A.F., Castrosua, Traintic, T.M.B., Idom o A.d.i.f.) y veintiún organismos públicos de investigación (como son C.E.I.T., U.S.C., Tekniker o U.C.3). El desarrollo de nuevas cadenas de tracción va encaminado a la incorporación de acumuladores (ultracapacitores, baterías, volantes de inercia o resortes así como la hibridación de estos), desarrollo de motores direct-drive sin reductora (que desencadenarán desarrollos de autobuses con piso 100% bajo y metros o tranvías con menor ruido y mayor fiabilidad y eficiencia), mejoras en pilas de combustibles (reformado embarcado, modulación o balance de planta más eficiente) e hibridación en motores de combustión interna. Otra de las líneas en el proyecto son los vehículos guiados y no-guiados con el desarrollo de autobuses de gran capacidad (doble articulación y piso 100% bajo), tranvías sin catenaria (acumulación y recarga ultrarrápida o con pila de combustible), estudios pormenorizado de ruedas ferroviarias y subestaciones reversible. Conjuntamente a las líneas anteriores se encuentra la climatización – confort (con el desarrollo de nuevos fluidos refrigerantes, ventilación más silenciosa y la eliminación de chorros de aire; acristalamientos de ultra baja emisividad con mayor confort acústico que permitan mostrar información y señales) y la explotación, que busca ser más eficiente y segura (con el desarrollo de sistemas de ayuda a la conducción, explotación y logística de flotas de hidrógeno).

Otros de los organismos públicos relacionados con el desarrollo de esta Tesis Doctoral, mediante la financiación de ciertos aspectos de la misma, han sido el Plan de Innovación Empresarial (P.I.E.), y el Instituto Madrileño de Desarrollo (I.M.A.D.E.) de la Comunidad Autónoma de Madrid. Los proyectos de investigación han sido el “Desarrollo de un sistema de acumulación para ayudar al arranque de vehículos automóviles” (proyecto con referencia P.I.E. 311/2008) y “Captador, acumulador y transmisor de energía” (proyecto con referencia P.I.E. 679/2008). Los trabajos han tenido cabida dentro de ambos programas ya que son actividades de investigación y desarrollo, tanto de procesos como de productos y/o servicios, dentro del epígrafe de desarrollo experimental. Las actividades técnicas realizadas tenían el objetivo de aplicar los resortes espirales a torsión como elemento de almacenamiento de energía y de arranque rápido en la industria del automóvil.

1.2.- Justificación.

Las diferencias entre la energía producida y consumida y la variación de la misma a lo largo del tiempo, hace necesario el diseño de sistemas de almacenamiento de energía como medio de aumentar la eficiencia del sistema energético, tanto macro como microeconómicamente. Los sistemas de almacenamiento permiten reducir las diferencias entre producción y consumo así como optimizar y reducir los consumos energéticos tanto localmente como globalmente.

Las soluciones técnicas y tecnológicas son varias desde enfoques eléctricos, químicos o mecánicos. Dentro de los sistemas mecánicos de aplicación industrial, están los volantes de inercia, sistemas hidráulicos o aire comprimido, entre otros.

La alternativa planteada, en esta Tesis Doctoral, es el almacenamiento mediante energía potencial elástica por deformación de un resorte espiral a torsión. Dicha alternativa es conocida y empleada desde hace tiempo, aunque no en almacenamiento industrial de energía sino en otros usos con menores requerimientos, como son la relojería, cinturones de seguridad, dispositivos de retorno o juguetes a cuerda. Ninguno de ellos es capaz de almacenar energía a nivel industrial, comparable con otros sistemas de acumulación. El avance en las últimas décadas de los materiales compuestos, abre las puertas a la utilización de los resortes espirales a torsión como medio de almacenamiento de energía, debido a que este tipo de materiales disponen de valores elevados de tensión máxima admisible y reducidos de módulo elástico y densidad, respecto a otro tipo de materiales como son los metálicos o plásticos de empleo industrial más habitual, lo que permite almacenar mayores cantidades de energía por unidad de volumen y peso. Así, el paso tecnológico planteado va a requerir de nuevas herramientas de desarrollo (análisis y cuantificación de variables de influencia, procedimiento de desarrollo, estudio analítico de la curva característica, desarrollo inverso...) y de análisis de optimización del sistema (cuantificación de variables con influencia inversa sobre especificaciones de diseño, configuración del sistema, sección resistentes...), ya que los órdenes de magnitud de las variables puestas en juego en posibles desarrollos industriales, su no cuantificación y optimización puede implicar que el desarrollo no sea viable.

Teniendo en cuenta las consideraciones anteriores el desarrollo de esta Tesis Doctoral aporta una alternativa más en las diferentes tecnologías de almacenamiento de energía existentes en la actualidad, que a su vez permite ampliar el campo de aplicación en la de sistemas industriales (al poder proporcionar par de baja variabilidad). Adicionalmente, como se analiza en el segundo capítulo de esta Tesis Doctoral, no existen hasta la fecha modelos generales para el diseño de resortes espirales a torsión y aún menos referencias sobre tratamiento analítico de los mismos. Todo ello se aúna con la posibilidad de empleo de los resortes como elemento de máquinas en ciertas aplicaciones que no se esperaba hace poco tiempo, debido a los avances en

nuevos materiales, con la reducción de dimensiones y aumento de sus prestaciones. En estas nuevas aplicaciones, con resortes de mayores prestaciones (como puede ser mayor fuerza, potencia o energía), es aún más importante disponer de herramientas de análisis para la optimización de este elemento de máquinas. Para todos los aspectos mencionados se requiere realizar un desarrollo metodológico de los resortes espirales a torsión.

1.3.- Objetivos.

El objetivo fundamental de la Tesis Doctoral es el desarrollo de un modelo metodológico y procedimiento de diseño secuenciado para la selección de resortes espirales a torsión para diferentes entornos y aplicaciones. Metodología que debe ser válida para resortes con cualquier curva característica (par - ángulo girado) requerida, teniendo en cuenta las restricciones o limitaciones de diseño, según la aplicación para la que se desarrolle, como es el almacenamiento de energía o la regulación de potencia.

Los objetivos secundarios alineados con el principal son los siguientes:

- Estudio y análisis de los parámetros de diseño sobre la curva característica par - ángulo girado.
- Desarrollo de una metodología analítica para la optimización en peso y volumen.
- Estudio analítico del caso particular de resortes espirales a torsión con curva generatriz clotoïdal y variación de la rigidez a flexión con la longitud.
- Validación experimental de los modelos de la metodología de diseño creada, mediante el desarrollo de las correspondientes instalaciones y procedimientos de ensayos.

1.3.1.- Importancia industrial.

La presente Tesis Doctoral analiza la viabilidad técnica de una nueva solución tecnológica en el ámbito del almacenamiento de energía, comparable y competitiva frente a otros sistemas existentes actualmente, así como un procedimiento y modelo de desarrollo (con su correspondiente validación experimental) del componente básico de los resortes espirales a torsión. La importancia de las investigaciones se establece por una parte al analizar el mercado energético, el cual cuenta con numerosos proyectos científicos y tecnológicos de desarrollo, para cubrir los requerimientos de eficiencia y ahorro energético de la sociedad actual, y por otra el encuadre estratégico de la investigación con las acciones del Plan Nacional de Investigación, Desarrollo e Innovación.

Tiene relación directa con diferentes acciones estratégicas dentro del “Plan Nacional de Investigación Científica, Desarrollo e Innovación Tecnológica 2008-2011” tanto en lo referente a la energía y cambio climático. La acción estratégica de “Energía y Cambio Climático” tiene por objetivo principal desarrollar un sistema energético sostenible y abastecido por recursos autóctonos especialmente renovables o ampliamente disponibles en el mercado mundial, como el carbón limpio y la energía nuclear, así como desarrollar tecnologías destinadas a lograr mejoras de la eficiencia energética, reducir el consumo de energía y mitigar, prever y adaptarse al cambio climático. La tecnología desarrollada mediante la Tesis Doctoral se puede adaptar a cualquier sistema, tanto de generación, transporte, como consumo final, aumentando los rendimientos del mismo y disminuyendo su sobredimensionamiento. En el caso concreto de las energías renovables, se podrían mitigar las ondulaciones que estas energías generan a la red eléctrica general y la necesidad de sistemas auxiliares cuando su generación directa se destina al consumo final. Esta acción general, se concreta en dos líneas estratégicas donde España: Línea 1, energía y mitigación del cambio climático para la producción de energía final limpia y la eficiencia energética, con especial incidencia en el sector transporte y la edificación y línea 2, Movilidad sostenible - transporte.

Así mismo, la Tesis Doctoral está alineada con el desarrollo e innovación tecnológica sectorial del Plan Nacional, principalmente en los epígrafes relativos a energía, transporte e infraestructuras. Según dicho informe en lo relativo a la energía, Europa necesita intervenir urgentemente y de forma concertada, para conseguir una energía sostenible, segura y competitiva. En España se pretende potenciar las fuentes propias de producción, así como favorecer la eficiencia y el ahorro con medidas apropiadas, siendo de vital importancia para reducir la dependencia exterior y mejorar la sostenibilidad económica y social. Las investigaciones y desarrollos deben tener como objetivo principal la integración en el sistema energético para mejorar la seguridad de suministro, la diversificación de fuentes de abastecimiento, la protección del medio ambiente y todo ello sin que sus costes mermen la competitividad de nuestra economía. Todas estas características las cumplen de forma general los sistemas de acumulación y en particular un sistema mecánico como el analizado, por su alta fiabilidad y seguridad.

Otro de los objetivos tecnológicos del Plan Nacional, es la aplicación de los sistemas de acumulación en el consumo final energético, y en concreto en el transporte, al ser uno de los sistemas cuya implantación posibilita mayor eficiencia global. Dentro de los objetivos se encuentra buscar un sistema de transporte más integrado, seguro, eficiente, sostenible y respetuoso con el entorno, para ello se promueve la investigación, el desarrollo y la innovación para la consecución de productos, procesos y servicios novedosos dentro de los diferentes modos: ferroviario, carretera, aeronáutico y marítimo, así como los sub-sectores relacionados.

1.4.- Contenido.

Se explica brevemente el contenido de esta Tesis Doctoral, definiéndose la estructura y contenido de cada capítulo agrupados en distintos bloques.

Capítulo 1 – Introducción.

En el primer capítulo se introduce el tema de desarrollo, justificando tanto el objetivo principal como los secundarios de la misma, desarrollo metodológico de resortes espirales a torsión como medio de almacenamiento de energía potencial elástica.

Capítulo 2 – Resortes espirales a torsión. Antecedentes y aplicaciones.

En el segundo capítulo se describen los métodos clásicos de análisis y cálculo de resortes espirales a torsión. Están basados fundamentalmente en ábacos de diseño para materiales metálicos con formulaciones empíricas. Se analiza el caso particular de resortes con curva par – ángulo girado de baja variabilidad, mediante diferentes desarrollos haciendo variar alguna propiedad particular del fleje o de sus condiciones de contorno.

Capítulo 3 – Modelo generalizado de resortes espirales a torsión.

Se realiza el análisis y planteamiento metodológico de los resortes espirales a torsión, para lo cual se comienza con el estudio de las variables de diseño que afectan a la curva característica par – ángulo girado tales como la curvatura de fabricación del fleje, la relación entre curvaturas del fleje y de la carcasa y del árbol, el módulo de rigidez a flexión o las dimensiones de la sección resistiva del mismo, entre otras. Al estudiar el efecto de cada una de las variables de diseño sobre su comportamiento, se procede a plantear un modelo de comportamiento y procedimiento genérico de diseño para este tipo de resortes.

El comportamiento del resorte viene definido por las espiras libres, las bloqueadas tanto en el árbol como en la carcasa. Estas tres consideraciones permiten plantear un análisis de los resortes mediante el ajuste polinómico de estas variables, que van a variar con el par aplicado, así como la variación de la curvatura con la longitud y la rigidez a flexión. Dicho conjunto de ecuaciones permiten realizar un enfoque pseudo analítico para la resolución del sistema, aunque implica, en la mayoría de los casos, un análisis numérico por la complejidad del sistema de ecuaciones obtenido.

Estos aspectos y los dos procedimientos (de desarrollo y pseudo analítico) constituyen el análisis estático de los resortes espirales a torsión. Dicho análisis es complementado con un análisis energético, que permite obtener la curva par ángulo girado y el análisis de la deformación de la carcasa y obtención de la fuerza de contacto fleje - carcasa.

Capítulo 4 – Estudio analítico. Caso particular de resortes con curva generatriz clotoidal y variación de la rigidez a flexión con la longitud.

Se analiza el caso particular de resortes espirales a torsión con curva generatriz clotoidal con variación de la rigidez a flexión de la sección resistente inversamente proporcional a la longitud del fleje. Este caso particular permite ser tratado analíticamente. La curva característica par - ángulo girado es desarrollada analíticamente así como el ángulo girado por las espiras libres y bloqueadas tanto en árbol como en carcasa en función del par. En dichas curvas analíticas es posible realizar la cuantificación de los parámetros de diseño, la adimensionalización del proceso de diseño, así como analizar los casos particulares de sección resistente variable con la longitud y el bloqueo de espiras.

Capítulo 5 – Ejemplos de diseño con modelo y metodología propuestos.

El procedimiento de diseño será empleado en el desarrollo de dos resortes, como medio de experimentación práctica y validación de los planteamientos propuestos. Por una parte se desarrollará un resorte de curva característica de máxima compactación en el árbol a par máximo, mediante espiral de Arquímedes a par máximo, con rigidez a flexión constante. El otro resorte desarrollado tendrá curva generatriz clotoidal y variación del módulo resistente de forma inversa a su longitud. Dichos resortes serán empleados como medio de análisis de la curva característica y de validación de la teoría general.

Capítulo 6 – Materiales empleados. Optimización del fleje.

Se analizan los materiales empleados en la fabricación del fleje. Dicha selección se realiza teniendo en cuenta tanto criterios resistivos como su fabricabilidad. Se plantea la optimización del sistema, que tiene en cuenta tanto el trabajo a la máxima tensión admisible como la densidad de energía. Se requieren para ello materiales de alta tensión máxima admisible con mínimo módulo de elasticidad y densidad. La optimización va a aplicarse tanto al material, tipo de sección resistente (forma y composición de la misma) así como posibles configuraciones de montaje serie - paralelo.

Capítulo 7 – Validación experimental.

Se realiza la validación experimental de procedimiento de diseño y de los modelos desarrollados. Se han diseñado y fabricado dos resortes. Para ambos casos, se plantean los planes de ensayo y la instalación sobre la cual realizar la medición de las variables indeterminadas del sistema y la introducción en el mismo de las entradas o variables determinadas. Con dichos requerimientos son desarrolladas, diseñadas, construidas y puestas en servicio dos instalaciones de validación para ambos resortes.

En la discusión de resultados se analizan los ensayos llevados a cabo para los resortes. Se analiza el ajuste entre modelo y los resultados obtenidos. Se determina la influencia de las variables en el modelo, definiéndose la importancia de cada una de ellas así como si debe tenerse en cuenta alguna variable adicional.

Capítulo 8 – Conclusiones y líneas futuras de desarrollo.

A la vista de los ensayos y de su discusión, se analiza la modelización planteado de resortes espirales a torsión y la coherencia entre el modelo y los ensayos. Se plantean futuras líneas de desarrollo con el fin de aumentar la densidad de energía y mejorar la modelización de resortes espirales a torsión.

Referencias, listado de figuras, tablas y acrónimos.

Se presentan las diferentes fuentes de información empleadas en el desarrollo, que pueden servir de base para futuras investigaciones. Así mismo se incluye el listado de figuras, tablas y acrónimos empleados.

1.5.- Metodología de investigación empleada.

En el desarrollo de la investigación se parte del conocimiento de la literatura especializada, como punto de análisis e interpretación mediante relaciones y argumentaciones teóricamente coherentes, que van a ilustrar la realidad estudiada. El análisis debe permitir determinar los límites del estudio, las restricciones y definir el marco, en comparación con el resto de sistemas existentes. Mediante dicho estudio, se delimita la investigación, localizando los aspectos tanto positivos como negativos con origen interno y externo al estudio propiamente dicho. Se definirán así las fortalezas y oportunidades de la investigación con el fin de poder abordar las debilidades y amenazas de la misma.

En la Tesis Doctoral, se han analizado los diferentes desarrollos de resortes espirales a torsión, tanto desde un punto de vista de elemento de máquinas, como de nuevos desarrollos, algunos de ellos patentados,

que permiten dotar a este elemento de características específicas, así como diferentes aplicaciones y usos industriales de dicho tipo de resortes. Se observa que las aplicaciones típicas de este tipo de resortes son pequeños accionamientos, en los que se requiere pequeña energía y dimensiones, fabricados habitualmente en materiales metálicos. Su caracterización numérica suele estar basada en ábacos experimentales de empleo generalizado.

Por tanto, ante dicho entorno de desarrollo, la metodología de modelización generalizada debe permitir definir dichos resortes a partir de la curva característica requerida y las restricciones de diseño especificadas. Este objetivo constituye una ventaja respecto a los análisis existentes. Dicha ventaja podría, sin embargo, ser una debilidad, al trabajar en el mismo rango de parámetros de diseño y de aplicaciones en las que son empleados actualmente. Sin embargo, dicho problema no es tal, llevándose a cabo un enfoque generalista es posible emplear los resortes espirales a torsión en sectores y ordenes de magnitud diferentes.

Dicho análisis define el planteamiento concreto y las condiciones de contorno, analizándose las soluciones alternativas y sustitutivas con el fin de definir los hitos y puntos más relevantes de las diferentes alternativas. Definido el objetivo principal de la investigación, es posible y concretar los objetivos secundarios de la misma, como guía en la línea de investigación que conlleve al objetivo final marcado. En este caso el objetivo general es el desarrollo metodológico y procedimentado de resortes espirales a torsión, a partir de su curva característica y de las restricciones de diseño y aplicación específica de desarrollo. Se unen a este objetivo la validación experimental de la metodología (con el desarrollo de instalaciones y procedimientos de ensayo), la cuantificación de parámetros de influencia y la selección de materiales del fleje según requerimientos.

Definidos los objetivos se plantea el modelo teórico que contemple y represente todas y cada una de las variables a analizar, con las restricciones y limitaciones según las aplicaciones. Para poder realizar el modelo teórico es imprescindible el análisis pormenorizado de todas las variables y los límites que se van a aplicar sobre las mismas. Conocidas las especificaciones del diseño (curva característica a proporcionar y restricciones) se procede primeramente a realizar una análisis de cada una de las variables de influencia sobre la curva características, que va a permitir su modulación. Las variables a analizar son los esfuerzos en la sección resistente (esfuerzo principal de flexión respecto a los residuales de tracción – compresión y cortadura), longitud del fleje, tipo de espiral de fabricación, variación de la curvatura de la espiral de fabricación con la longitud, radios de curvatura de árbol y carcasa respecto a la espiral de fabricación y rigidez a flexión con la longitud del fleje. El análisis combinado de dichas variables permite modular la curva característica del resorte, aunque puede ser posible obtener una misma curva característica con diferentes combinaciones de parámetros de diseño. A partir de dicho análisis se plantea el procedimiento genérico de selección de las diferentes variables de diseño.

Conjuntamente con dicho estudio genérico se estudia un caso particular de resortes espirales a torsión, aquellos con curva generatriz clotoïdal (curvatura linealmente dependiente de la longitud del fleje) y rigidez a flexión inversamente proporcional a la longitud del fleje. Dicho caso particular permite el estudio analítico de su comportamiento y la comprobación de su coherencia con el procedimiento general planteado.

Desarrollado el modelo se requiere la validación experimental del mismo, tanto de su comportamiento como de las condiciones de partida y de las restricciones sobre cada una de las variables. Se define la plataforma de validación experimental, teniendo en cuenta tanto los datos de partida como las variables dependientes e independientes. En todo momento se debe condicionar su desarrollo a la representatividad real del prototipo sobre la investigación global llevada a cabo. Una vez desarrollada la plataforma de validación se deberá comprobar su correcto funcionamiento previo al análisis del modelo a estudio, mediante un caso teórico - práctico sencillo ya estudiado con anterioridad o recogido y comprobado dentro de la literatura científica especializada. Comprobado el correcto empleo de la plataforma de validación, se debe realizar la validación del modelo teórico mediante la aplicación de un plan de ensayo específico desarrollado. Dicho plan de ensayo debe contemplar las diferentes condiciones de funcionamiento teniendo en cuenta la necesidad de generar e imponer las variables independientes y la medición de las variables dependientes. El plan de ensayo puede requerir en ciertos casos de diversas plataformas de validación y prototipos. Dichos condicionantes deben ser tenidos en cuenta con el fin de la correspondiente coordinación de plazos y costes asociados mediante la elaboración del plan de ensayos correspondiente.

El proceso de validación debe ser retroalimentado respecto al modelo teórico, ya que si ambos no son coherentes, el modelo teórico debería ser replanteado. Se podría dar el caso, y si es así necesitaría análisis ex proceso, de disponer de nuevas variables a medir o de otras variables que, tras la experimentación, no son necesarias tener en cuenta en el modelo teórico. Tanto el planteamiento como la modelización, debe realizarse teniendo en cuenta la opinión científica publicada, ya que esto impulsa sinergias y abre posibles caminos, tanto de modelización como de validación.

Para la validación se diseñan y fabrican dos resortes, uno de ellos de baja variabilidad del par y otro de alta variabilidad del par. Para su análisis se desarrollan dos instalaciones de validación y los correspondientes protocolos de ensayo. En ambos casos se observa el alto grado de coherencia de los principales aspectos de la teoría desarrollada.

Una vez conseguido el ajuste entre modelo y ensayos se debe analizar la estabilidad o rango de validez del mismo. Podría darse el caso que bajo ciertas condiciones el modelo no fuese aplicable o inestable ante ciertas variaciones de parámetros. El ajuste del modelo debe siempre correlacionarse con las condiciones en las que ha sido desarrollado. El modelo finalmente constituido, debe servir para realizar el análisis de

influencia de las variables dependientes e independientes definidas. Dicho análisis servirá para tener una base científica de selección entre diversas alternativas de diseño, por ejemplo para el diseño fuera de las condiciones básicas definidas como hipótesis del modelo de diseño.

1.6.- Sistemas de almacenamiento. Propuesta de almacenamiento elástico de energía.

El almacenamiento de energía tiene una misión crítica en la organización de la infraestructura eléctrica en general y en cualquier consumidor final de la misma, tanto por motivos de seguridad y aseguramiento de un servicio independiente de energía, como el aumento del valor de las energías renovables en el mercado, la optimización de producción de energía mediante combustibles fósiles o como medio para facilitar una transición de mercados eléctricos regionales a mercados supranacionales competitivos. Mediante la energía almacenada se puede cubrir el diferencial entre la energía generada y consumida; haciendo el sistema eléctrico más estable y la implantación de unidades generadoras más cercana al punto óptimo. Existen diferentes técnicas para el almacenamiento de energía, tales como químicos (hidrógeno o bio-combustibles), electroquímicos (baterías, células regenerativas o pilas de combustible), eléctricos (capacitores o superconductores magnéticos), mecánicos (aire comprimido, volantes de inercia, resortes o acumulador hidráulico) y térmicos (líquidos criogénicos o salmueras).

Los resortes espirales a torsión permiten el almacenamiento de un amplio rango de energía y potencias, siendo estas especificaciones de diseño, junto con la curva par – ángulo girado requerida, pudiéndose emplear diferentes tipos de materiales y configuraciones para adaptarse a las restricciones del diseño. El sistema es flexible para ajustarse a diferentes escenarios de operación, no siendo tan rígido como otros sistemas de almacenamiento que se encuadran en un único rango de funcionamiento o para aplicaciones concretas. De manera genérica los sistemas de bajo almacenamiento de energía, por debajo del megavatio, son los volantes de inercia o capacitores. Los almacenamientos medios-bajos de energía, entre 1 y 50 MW, son las baterías, acumuladores ácido-base o sistemas basados en la reacción reducción oxidación. Los almacenamientos medios, entre 10 y 200 MW, consisten en células de flujo reverso o sistema de almacenamiento mediante aire comprimido. Mientras, las altas energías almacenadas, por encima de los 100 MW, son producidas por sistema de bombeo o almacenamiento mediante aire comprimido.

Los rangos comerciales de aplicación de estos sistemas (como se pueden observar en la *Figura 1(a)* con la comparación de la densidad másica de energía respecto a la densidad volumétrica) van desde las mayores densidades de energía característica de baterías no recargables o los sistemas con base al sulfuro de sodio y de litio con valores entre 250 y 700 KWh/m³ y 100 – 800 KWh/tonelada, hasta los valores medios de las Ni-Cd o las ácido - base entre 20 – 80 KWh/m³ y 20 – 40 KWh/tonelada o los menores de los volantes de

inercia y condensadores con valores menores de 30 KWh/m³ y 20 KWh/tonelada. En esta comparación somera se han excluido los sistemas de alta capacidad de almacenamiento, al tener aplicaciones muy específicas como son las centrales hidroeléctricas con los sistemas de bombeo de agua, o las centrales de ciclo combinado con sistemas de almacenamiento de aire comprimido.

Otro ratio de comparación entre los diferentes sistemas es la energía almacenada en función del tiempo de descarga (*Figura 1(b)*). Así para consumo continuo con valores medios de energía la tecnología más apropiada son las baterías, mientras que para descargas medias de minutos se emplearían baterías ácido – base y para descargas puntuales volantes de inercia (media – alta energía) o súpercondensadores (alta energía).

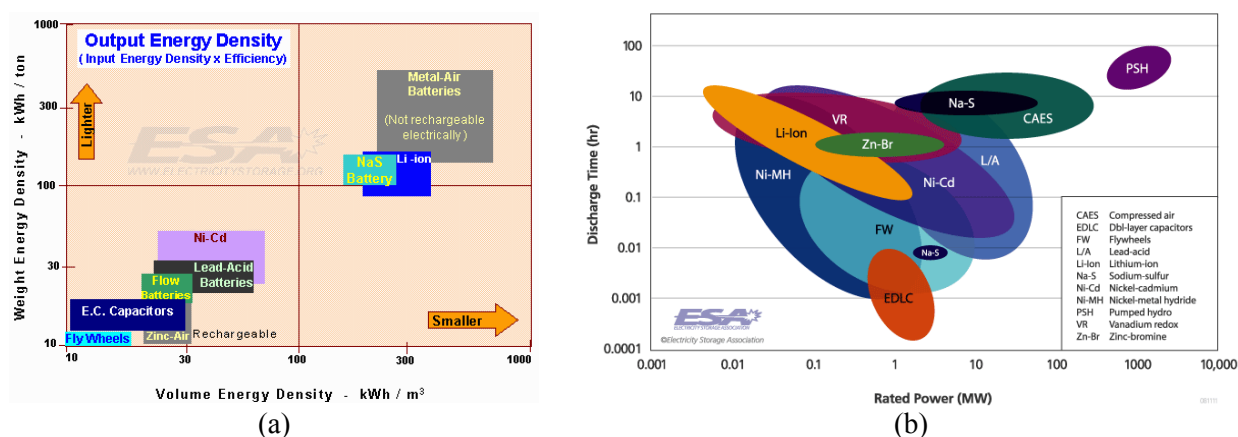


Figura 1. Densidad de energía y potencia vs tiempo de descarga entre tecnologías de almacenamiento.

El almacenamiento mediante resortes espirales a torsión se estima que tendría un ámbito de aplicación con un nicho de mercado estimado en el ámbito de súper condensadores, volantes de inercia y baterías, con una densidad de energía menor pero una mayor potencia específica. Dichas características permitirían abordar ciertos márgenes del mercado ocupados marginalmente por otras tecnologías. Dicho rango debe considerarse aproximado al no disponer de un prototipo comercial y debido a que en las futuras líneas de investigación se muestran vías de optimización del peso del resorte, lo que directamente influye en el aumento de la densidad de potencia y de energía.

Capítulo 2.- RESORTES ESPIRALES A TORSIÓN. ANTECEDENTES Y APLICACIONES.

Los resortes espirales a torsión han sido empleados históricamente como un elemento de máquinas, fabricado habitualmente en acero templado recocido y endurecido. En aplicaciones concretas se emplean metales no férreos, como el bronce al fósforo o el titanio, al requerirse resistencia a la corrosión, o berilio de cobre en aquellos que llevan corrientes eléctricas por su baja resistencia eléctrica. El principio básico, por el que la fuerza es proporcional a su extensión, es descubierto en 1676 por Robert Hook. Los diversos usos de los resortes espirales a torsión, permite generar una clasificación genérica específica de este tipo de resorte no obtenible como elemento de máquinas [Associated Spring Corporation, 1958; Berry, 1961; Chen, 2005; Connolly, 2008; Fukaya, 1978; Gross, 1975; Hymans, 1946; McGuire, 2009; McGuire, 1994; Person, 2010; Pook, 2010; Seames, 1957; Queener, 1970; Timoshenko, 1955; Votta, 1963; Wahl, 1963]. Existen diferentes tipos de resortes a torsión clasificándolos en resorte espiral de potencia con y sin carga (*Figura 2(a)* y *Figura 2(b)*), resorte motor de fuerza constante (*Figura 2(c)*) y de fuerza constante (*Figura 2(d)*).

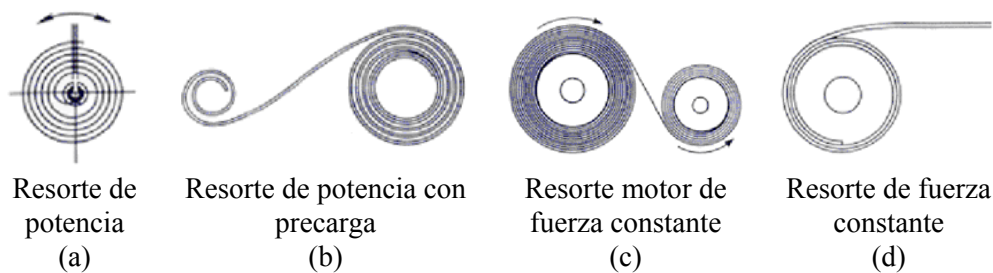


Figura 2. Diferentes tipologías de resortes espirales a torsión.

Este tipo de resortes se encuentran habitualmente enrollados en el interior de un árbol y encerrados dentro de una caja cilíndrica exterior llamada barrilete o carcasa. El resorte está unido al árbol en su extremo interior, y al barrilete en su extremo exterior. Los distintos tipos de resortes pueden proporcionar la misma energía a mayor o menor potencia (mayor potencia con alto par y bajo número de vueltas mientras que menor potencia se alcanza con bajo par y alto número de vueltas). Las conexiones son generalmente pequeños ganchos o pestañas, que se enganchan al resorte por los agujeros cuadrados en sus extremos, por lo que puede ser fácilmente reemplazado (*Figura 4(b)*). Son empleados como fuente de energía de los relojes mecánicos, cajas de música o juguetes mediante la torsión de la cinta de metal que los constituye.

Una de las aplicaciones clásicas de los resortes son los relojes. Los resortes aparecieron por primera vez en los relojes del siglo XV con el fin de hacerlos más pequeños y más portátiles [De Carle 1971 y Dohrn-van Rossum, 1997]. El reloj más antiguo que ha llegado a nuestro tiempo impulsado por un resorte es el

Burgunderuhr o reloj de Borgoña, cuya iconografía sugiere que fue fabricado alrededor de 1430. El problema histórico de los resortes para relojería es que proporcionan un par no constante que disminuye a medida que desenrolla. Sin embargo, el reloj tiene que funcionar a un ritmo constante para mantener la hora exacta. De ahí la necesidad de instalar un mecanismo adicional que ajuste su curva característica.

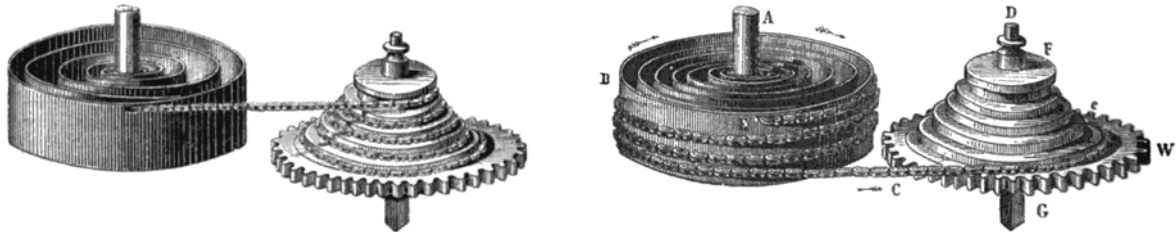


Figura 3. Mecanismo fusée en procesos de carga y descarga.

Dos soluciones surgieron en el siglo XV para resolver dicha diferencia: el stackfreed (excéntrica montada en el árbol del resorte con un rodillo que presiona sobre este) y el fusée (polea cónica con cadena envuelta alrededor del cañón principal cuya relación de transmisión varía a fin de corregir la fuerza del resorte (Figura 3)). El stackfreed añadía mucha fricción reduciendo la vida útil del reloj y por tanto su uso fue abandonado. Sin embargo, el fusée ha sido empleado como método habitual de obtener resortes a par constante hasta el siglo XIX con la incorporación del resorte de barril. Otro dispositivo empleado para mantener el par constante fue el stopwork en el que se empleaba sólo la parte central de la curva de par del mismo, donde aquel es más constante. Sin embargo, en los relojes modernos dicho mecanismo no es necesario [Shigley, 2003]. Un muelle principal del reloj moderno es una larga tira de acero templado y pavonado, aleación de acero o especializados de 20 - 30 centímetros de largo y 0,05 - 0,2 milímetros de espesor. (Figura 4(a)).



(a)



(b)

Figura 4. Resortes espirales a torsión habitualmente empleados.

Otro conjunto de resortes producen un par constante mediante la forma del resorte al disponer de un tramo con curvatura inversa o forma de S. Esto posibilita tener un conjunto extra de espiras bloqueadas en el exterior para el rango final de la curva característica de un resorte con una única curvatura. Otro de los resortes empleados son los helicoidales formados por una varilla en forma de hélice o bobina que se somete a

torsión sobre el árbol de la misma. El fleje se somete a esfuerzos de flexión y cortantes, siendo los primeros los principales [Bandari, 2008; Barnes Group Inc, 1993; Hearn, 1997 y Marghitu, 2005].

Otros usos habituales de los resortes espirales a torsión son las barras de torsión, empleada como componentes de suspensiones de automóviles; el péndulo de torsión utilizado en relojes de péndulo o el movimiento Arsonval utilizado en los contadores mecánicos tipo puntero o en dispositivos digitales de microespejos chip. Otras aplicaciones son mecanismos de los ganchos de ropa o de las puertas de garaje. [Auge&Cie, 1957; Fenstermacher, 2002; Gerrit, 2010; Kiyoshi, 1971; Kuroda, 2010; Luo, 2009; Masayuki, 2002; Morikawa, 1990; Philip, 2011; Reynolds, 2007; Soo, 2010; Yukihiro, 2010]. Así mismo han aparecido en los últimos años aplicaciones teóricas en las que se emplean resortes espirales a torsión para accionamientos de mayor tamaño [Beremps, 1991; Jenuwine, 1994; Park, 2004; Tchibansky, 2003].

La teoría clásica de resortes espirales a torsión realiza un análisis genérico para dicho elemento de máquinas, sin especificar la curva característica, ya que es considerada habitualmente lineal. Al no existir estudios genéricos sobre bloqueo y flujo de espiras entre carcasa y árbol, ni estudios analíticos de cuantificación genérica de las variables de influencia. Por tanto, existe un amplio rango para el desarrollo y la investigación. Los resortes espirales a torsión clásicamente son diseñados como un elemento de máquinas cuyas características están encorsetadas dentro de los márgenes marcados por la experiencia (tablas, ábacos o correlaciones experimentales entre otros) sin existir una metodología clara de desarrollo. [American Steel & Wire Co, 1941; Armand, 1967; Blake, 1966; Berry, 1961; Carlson, 1982; Collins-a, 2003; Collins-b, 2003; Dubbel, 1969; Gakkai, 2004; Hicks, 1987; Maker, 1978; Millar, 2010; Mizuno, 2004; Niemann, 1967; Osthwein, 1990; Reymondin, 2003; Shimoseki, 2003; Silberstein, 2002; Spring Manufacturers Institute, 2004; Spring Manufacturers Institute, 2002 Yamada, 2007; Wright, 2008].

2.1.- Resortes de alta variabilidad de par.

Se presentan a continuación los planteamientos teóricos más habituales para los resortes espirales a torsión [Ashwell, 1950; Barten, 1945; Bisshopp, 1945; Scott, 1955; Chen, 2009; De Bona, 1997; Knox, 2009; Rowell, 1934; Shinohara, 1978; Timoshenko, 1961; Turrière, 1939; Votta, 1952]. Para dicho análisis se considera un momento M aplicado en un resorte de radio de carcasa R , máxima separación del resorte a y radio del árbol b , siendo n el número de vueltas, θ el ángulo girado. Suponiendo que la espiral es de Arquímedes se puede posicionar el resorte a partir de la situación de montaje y para un ángulo girado de $2\pi n$ vueltas (*Figura 5*).

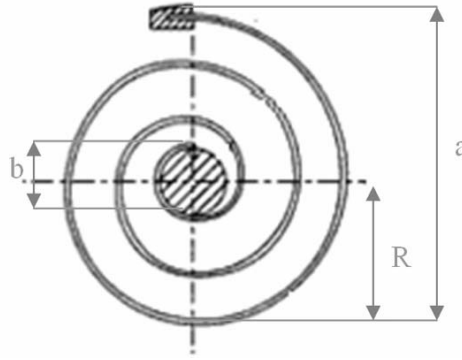


Figura 5. Parámetros empleados en el análisis clásico de resortes espirales a torsión.

$$\theta = 0 \quad r = r_0 = \frac{b}{2} \quad r = r_0 + \frac{A}{2\pi}\theta$$

$$\theta = 2\pi n \quad r = r_0 + \frac{a}{2} = \frac{b}{2} + \frac{A}{2\pi} 2\pi n$$

Con lo que la ecuación genérica que define la geometría para dichos resortes de fabricación se puede expresar,

$$r = \frac{b}{2} + \frac{(a-b)}{4\pi n}\theta \quad (1)$$

La longitud del resorte puede ser calculada a partir de la relación entre el diferencial de longitud, el radio y el diferencial de ángulo,

$$L = \int_0^{2\pi n} dl = \int_0^{2\pi n} r d\theta = \int_0^{2\pi n} \left[\frac{b}{2} + \frac{(a-b)}{4\pi n}\theta \right] d\theta = \frac{\pi n}{2}(a+b) \quad (2)$$

Así es posible correlacionar el ángulo girado con el par aplicado, observándose el comportamiento lineal de forma inversamente proporcional al módulo resistente de la sección,

$$\theta = \int_{L_{libre}} \frac{M}{EI} dl = \frac{M}{EI} \left[\frac{\pi n}{2}(a+b) \right] \quad (3)$$

El cálculo resistivo clásico consiste en aplicar la tensión máxima admisible del material a la sección crítica del resorte,

$$\sigma_{\max} = \frac{12M}{bt^2} \quad (4)$$

Estas consideraciones genéricas no permiten realizar un análisis pormenorizado de la curva característica del resorte, ni de su modulación, cuando hay contacto entre espiras. Conjuntamente con este análisis general existen ciertos estudios particulares para algunos tipos específicos de resortes mostrados en la Figura 2.

Resortes de potencia.

Los resortes de potencia son resortes espirales de sección delgada, consisten en un fleje montado en un árbol y confinado en un alojamiento, con doble o simple curvatura, que almacenan energía mediante su deformación elástica. Son habitualmente empleados como elementos generadores de potencia para accionamiento de relojes, juguetes, cinturones de seguridad o componentes eléctricos.

Para dichos resortes el procedimiento de diseño, la fabricación y las especificaciones de diseño existen fórmulas analíticas, obtenidas algunas de ellas de forma experimental, para su estudio.

La deflexión de este tipo de resortes, es difícil de estimar debido al cambio de curvatura y el contacto entre espiras, que se produce aunque exista buena lubricación entre ellas; observándose la irregularidad en el par y posibles procesos de histéresis (*Figura 6 (a)*). Una de las correlaciones más importantes la relación entre el radio del árbol y el espesor del fleje debe encontrarse entre 15 y 25 [Berry, 1961]. La máxima energía almacenada se produce cuando el resorte ocupa entre un 40% - 50% del espacio disponible entre árbol y carcasa. El ángulo girado suele ser menor que las 25 vueltas con una relación longitud espesor menor que 115.000.

La *Figura 6 (b)* muestra curvas típicas de selección de resortes espirales a torsión, según las recomendaciones de diseño marcadas por la experiencia. Existen fórmulas experimentales del ángulo girado por el resorte cuando el fleje ocupa la mitad del espacio comprendido entre el árbol de diámetro d y la carcasa de diámetro D , longitud L y espesor del fleje t .

$$\theta = \frac{\sqrt{2(d^2 + D^2)} - (d + D)}{2.55 \cdot t} \quad L = \frac{D^2 - d^2}{2.55 \cdot t} \quad (5-6)$$

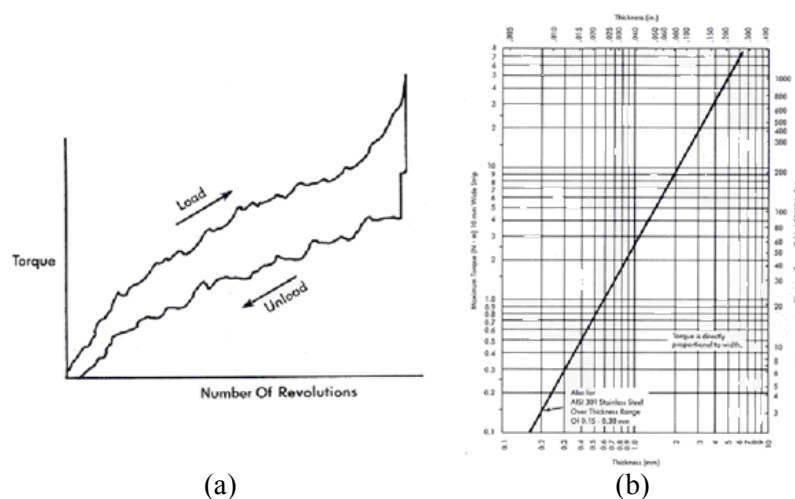


Figura 6. Ábacos y consideraciones de diseño para resortes espirales a torsión de potencia.

Sin embargo si el espacio ocupado por el fleje no es la mitad del disponible la fórmula anterior no es válida y se debe emplear la siguiente expresión que depende del factor experimental k (Tabla 1).

$$\theta = k \cdot \frac{\sqrt{1.27 \cdot t \cdot L + d^2} + \sqrt{D^2 - 1.27 \cdot t \cdot L - (d + D)}}{2 \cdot t} \quad (7)$$

Tabla 1. Factor k para el cálculo del ángulo girado para power springs.

$0.785(D^2 - d^2)/(L \cdot t)$	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	2.0
k	0.850	0.834	0.823	0.813	0.804	0.795

El procedimiento de diseño clásico de este tipo de resortes consiste en determinar la relación par - ángulo girado, para una determinada correlación entre parámetros del fleje, empleando los ábacos de la Figura 6 o análoga. Una vez seleccionado el punto de trabajo, el espesor de la espira será función del máximo par, teniendo en cuenta los factores de seguridad relativos tanto a tensión como a fatiga. Finalmente el ángulo girado se obtendrá empleando alguna de las expresiones planteadas anteriormente.

Otros autores [Reymondin, 2003] analizan el número de vueltas que daría un resorte en tres estados diferentes, el primero de ellos cuando el fleje está desmontado (N_0), el segundo cuando está montado y sin par aplicado, resorte bloqueado en la carcasa (N') (Figura 7(a)) y por último con máximo par aplicado bloqueada la longitud del fleje en el árbol (N''). En dichas expresiones se designa por R el radio de la carcasa, r el radio del árbol, L la longitud del fleje, e el espesor, h la altura, E el módulo elástico y σ_{max} el límite elástico del material, obteniéndose las siguientes expresiones,

$$N_0 = \frac{L}{\pi \cdot e} \cdot \frac{\sigma_{max}}{E} \quad N' = \frac{1}{e} \cdot \left(R - \sqrt{R^2 - \frac{L \cdot e}{\pi}} \right) \quad N'' = \frac{1}{e} \cdot \left(\sqrt{r^2 + \frac{L \cdot e}{\pi}} - r \right) \quad (8-10)$$

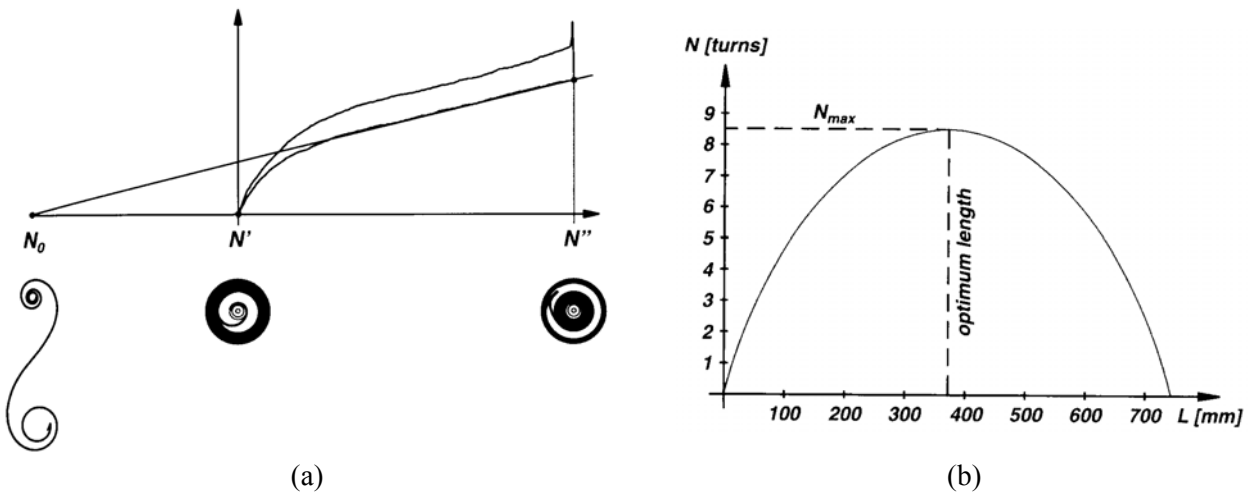


Figura 7. (a) Curva característica de resorte desmontado y montado sin par aplicado y con par máximo (b) Optimización de la longitud del resorte con el número de vueltas.

El valor máximo del número de vueltas dado por el resorte y la longitud optimizada (*Figura 7(b)*) se pueden obtener a partir de las ecuaciones 11 y 12. Así mismo la experiencia según dichos autores indica que para obtener la máxima cantidad de energía almacenada la longitud se debe incrementar un 20% respecto a la teórica.

$$N_{\max} = \frac{\sqrt{2 \cdot (R^2 + r^2)} - r - R}{e} \quad L = \frac{\pi \cdot (R^2 + r^2)}{2 \cdot e} \quad (11-12)$$

De igual manera se puede obtener la máxima energía almacenada (W_{\max}) y el par máximo (M_{\max})

$$M_{\max} = \frac{e^2 \cdot h}{6} \cdot \sigma_{\max} \quad W_{\max} = \frac{e \cdot h \cdot L}{6} \cdot \frac{\sigma_{\max}^2}{E} \quad (13-14)$$

Resortes espirales sin contacto de espiras en funcionamiento.

En este tipo de resortes no se tocan las espiras durante el funcionamiento. Los esfuerzos que aparecen, siendo el de flexión el más importante de ellos, se limitan a unas pocas revoluciones. Un diseño típico tiene una relación altura - espesor de 10 y de longitud - espesor de 2000. Con la misma nomenclatura empleada con anterioridad se pueden obtener los valores del ángulo girado y de la longitud del fleje, a partir de diámetros, características del material de fabricación o par requerido (*Figura 8*).

$$\theta = \frac{6 \cdot M \cdot L}{\pi \cdot b \cdot t^3 \cdot E} \quad L \cong N \cdot \pi \cdot \frac{D + d}{2} \quad (15-16)$$

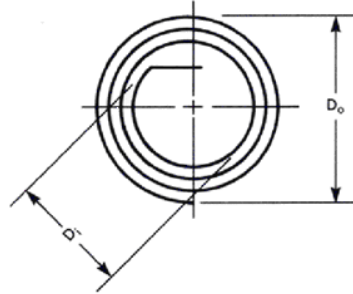


Figura 8. Parámetros de diseño para resortes espirales sin contacto entre espiras en funcionamiento.

Existen también otras correlaciones más desarrolladas para determinar el espacio requerido entre las espiras en función del ángulo girado.

$$\theta \cong \frac{\sqrt{D_a^2 + 1.27 \cdot t \cdot L} - D_a}{2 \cdot t} - \frac{2 \cdot L}{\pi \cdot (OD + D_a)} \quad (17)$$

Las ecuaciones anteriores son sólo aplicables cuando los dos extremos del resorte están en su alojamiento de manera rígida y sin tener en cuenta efectos de fatiga. Los efectos de fatiga se analizan con un factor de corrección sobre las expresiones que depende tanto de la forma de la espira como de la curvatura.

2.2.- Resortes de baja variabilidad de par.

Dentro de los desarrollos clásicos de resortes espirales a torsión, los que más se aproximan a un comportamiento de baja variabilidad del par son los resortes denominados de fuerza constante. Un resorte espiral a torsión de fuerza constante es aquel que dispone de un cambio de curvatura constante mediante el cual se consigue dicha forma de curva característica (dentro de los cuales se encuentran los denominados Neg'ator) (Figura 9 (a) y (b)). Dichos resortes suelen montarse en carcasas con un diámetro entre 10% y 20% mayor que el diámetro del resorte. Normalmente la zona activa del resorte es estimada por diversos autores en 1,25 veces el diámetro del motor. La distancia recomendada entre el centro del fleje y la zona más extrema es 0,8 veces el diámetro [Reymondin, 2003].

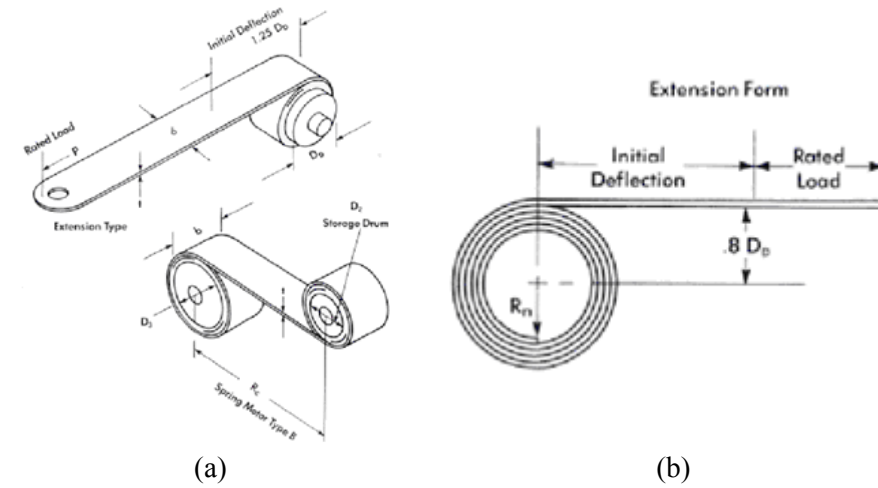


Figura 9. Parámetros de diseño para resortes espirales a torsión de fuerza constante.

En función de la configuración del resorte existen formulas empíricas para la obtención de sus principales características técnicas y correlaciones recomendadas entre ciertos parámetros de diseño. Las correlaciones definidas a partir del uso y costumbre, son una relación entre altura y espesor de 100, diámetro entre espesor 250 o relación de diámetros carcasa - árbol entre 1,6 y 2. Las ecuaciones analíticas a emplear en este caso concreto, aplicando una nomenclatura análoga a la del epígrafe anterior.

$$P(N \leq 10) = \frac{E \cdot b \cdot t^3}{6.5 \cdot D_m^2} \quad P(N > 10) = \frac{E \cdot b \cdot t^3}{6.5 \cdot D_m^2} \cdot \left(\frac{2}{D_m} - \frac{1}{D_1} \right) \quad (18-19)$$

$$M = \frac{E \cdot b \cdot t^3 \cdot D_3}{13} \cdot \left(\frac{1}{D_0} + \frac{1}{D_3} \right)^2 \quad S = E \cdot t \cdot \left(\frac{1}{D_0} + \frac{1}{D_3} \right) \quad (20-21)$$

$$L = \pi \cdot N \cdot (D_3 + N \cdot t) + 10 \cdot D_3 \quad R_3 = R_0 \cdot \sqrt{4 + \frac{4 \cdot R_3}{R_0} + \frac{R_0}{R_3} + \left(\frac{R_3}{R_0} \right)^2} \quad (22-23)$$

Se pueden encontrar desarrollos para ciertas aplicaciones concretas, como son la relojería, industria juguetera o cinturones de seguridad, con requerimientos de baja variabilidad de par. Dicha curva se consigue produciendo bloqueo de espiras en la carcasa de modo que haya una reserva de longitud que se desbloqueará en el rango de pares de interés y modulando la variación de la rigidez a flexión a lo largo del fleje o cambios de curvatura a lo largo de la longitud. El cambio de rigidez a flexión se puede conseguir mediante incremento de espesores o anchuras, con actuación de flejes concatenados o mediante vaciados en el alma de los flejes. Estos resortes, suelen fabricarse con finas láminas de acero de alta elasticidad y longitud, disponiendo de gran longitud bloqueada en el árbol o carcasa que facilita generar una reserva de vueltas y un par de variabilidad reducida para las aplicaciones para las cuales son diseñados. La utilización de este principio a otros usos, de mayor par y dimensiones, no es directamente extrapolable.

Uno de los primeros desarrollos para reducir la variabilidad del par, está basada en resortes de barrilete [Nussbaumer, 1920], logrando alcanzar una fuerza motriz “menos variable” (*Figura 10*). Este primer acercamiento a un resorte espiral a torsión con par de baja variabilidad se logra mediante una sección útil del fleje creciente, mediante espesor constante y altura progresivamente mayor a lo largo de la longitud. El aumento de inercia de la sección resistente se consigue o trabajando con un fleje de espesor constante de forma trapezoidal y rectangular o mediante el vaciado triangular en el interior de la misma. Dicha variación de inercia genera que, al irse enrollando el resorte en el árbol interior y disminuir la longitud del fleje, se disponga de una sección de menor inercia en su enrollamiento en el árbol. Otro de los desarrollos de resortes con variación de inercia a lo largo de la longitud, y por tanto con un tratamiento análogo, se debe a [Wantz, 1963], cuya aplicación es la industria relojera.

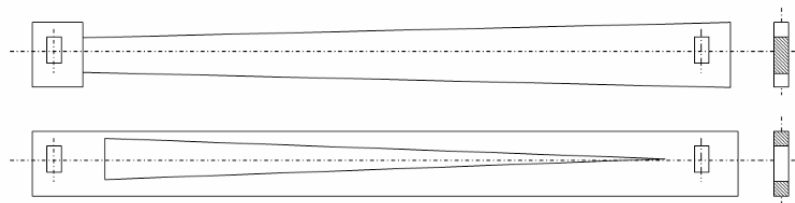


Figura 10. Fleje de sección resistente variable propuesto por Nussbaumer.

Un principio de funcionamiento diferente, buscando igualmente la reducción de la variabilidad del par es el planteado por [Newman, 1926]. El factor principal del diseño es la curvatura de fabricación del resorte (*Figura 11*). El sistema propuesto consiste en un resorte con curvatura creciente en la mitad de su longitud, en cuyo extremo se sitúa el árbol. Mientras que en la otra mitad la curvatura es decreciente, con lo que el extremo libre termina bobinándose en sentido contrario al del árbol. Se logra así, dar menor potencia cuando está completamente enrollado y más en el proceso de carga respecto a un resorte torsional de forma

tradicional. Este fenómeno se debe al cambio de curvatura generado al traspasar espiras de curvatura decreciente a creciente, una vez que se ha enrollado la longitud de curvatura creciente.

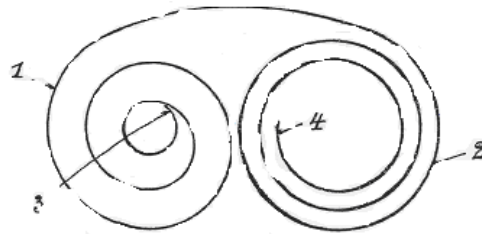


Figura 11. Curvaturas de fabricación del resorte propuesto por Newman.

Otro resorte que emplea la curvatura de fabricación como variable diferenciadora en su curva de comportamiento es el propuesto por [Auge, 1957], con aplicación en relojería, cuya doble curvatura permite alcanzar un par de baja variabilidad, aunque en ningún momento se cuantifica dicha variabilidad (*Figura 12*). La peculiaridad de este diseño viene en el doble origen de la baja variabilidad en el par, por un lado esta es debida a la curvatura y, por otro, a la variación de la inercia a lo largo de la longitud. Se plantea la posibilidad de variar a lo largo de la longitud del resorte tanto el espesor como el ancho del fleje lo que va a generar que la inercia se pueda seleccionar de manera variable. Dicha variación de inercia puede ser realizada tanto con refuerzos puntuales como con apilamientos de capas de diferentes características resistivas.

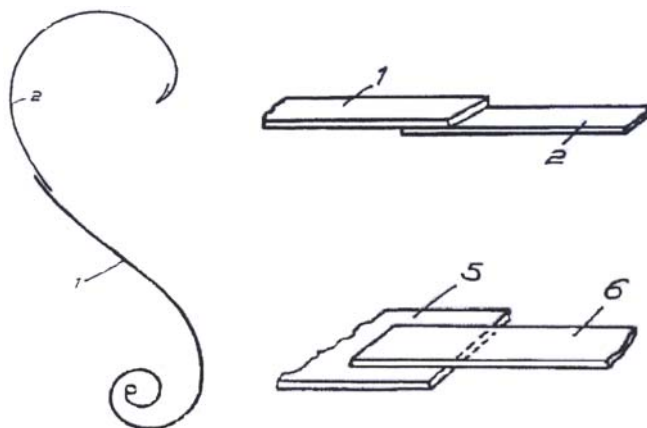


Figura 12. Diseño de resorte propuesto por [Auge, 1957].

El desarrollo de [Kabushiki, 1971] plantea un resorte en el que varía la sección resistente del fleje mediante vaciados de diferentes formas geométricas (*Figura 13*). Sus aplicaciones se centran en pequeños resortes básicamente de relojería y juguetería con una variabilidad del par no cuantificada.

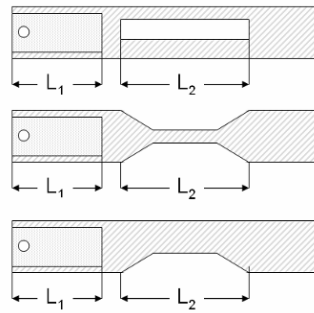


Figura 13. Diferentes secciones resistentes de fleje propuesto por [Kabushiki, 1971].

Una forma de obtener la reducción de variabilidad del par, sumando varios de los efectos anteriores, es la llevada a cabo por [William, 1981], en la que se aúna la variación de inercia con el empleo de varios flejes. Dicho resorte consisten en el apilamiento de varias bandas superpuestas de diferentes longitudes sobre el mismo punto de amarre a la carcasa. Sin embargo en dicho desarrollo no se ofrece información sobre la constancia del par.

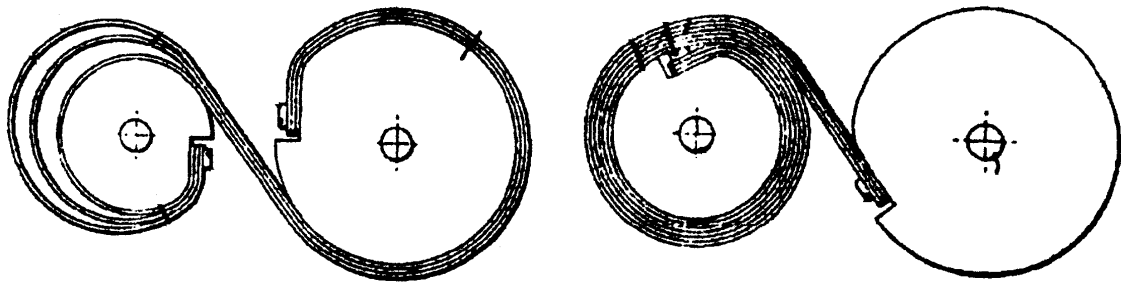


Figura 14. Diseño de resorte propuesto por [William, 1981].

Existe otro conjunto de desarrollos cuya base para conseguir baja variabilidad de par consiste en fabricar el resorte de gran longitud con sección constante y flexible normalmente de acero. Entre dichos desarrollos se encuentra [Junghans, 1941] (Figura 15), desarrollado para la industria relojera.

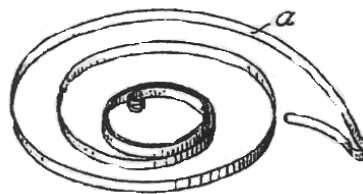


Figura 15. Propuesta de resorte de fabricación por [Junghans, 1941].

Sin embargo, uno de los desarrollos más extendidos es el [Neg'ator, 1979], que bajo el mismo principio básico de funcionamiento, permite transmitir par con una constancia que puede llegar al 20% entre diferentes

posiciones relativas de los árboles, no concéntricos como es el caso clásico (*Figura 16*). Según la aplicación del resorte, se puede disponer de un resorte entre dos tambores paralelos de forma tangencial con configuración interna o externa.



Figura 16. Tipos de resorte [Neg'ator, 1979].

En la propuesta de [Foster, 1965], la variabilidad es proporcionado al disponer de gran longitud, ya esté bobinada en el árbol o en la carcasa, que va a cambiar de curvatura adaptándose de una a la otra (*Figura 17*). Sin embargo no aporta el análisis y cuantificación de dicho efecto. La principal aplicación remarcada por el autor es la tracción y accionamiento de juguetes infantiles.

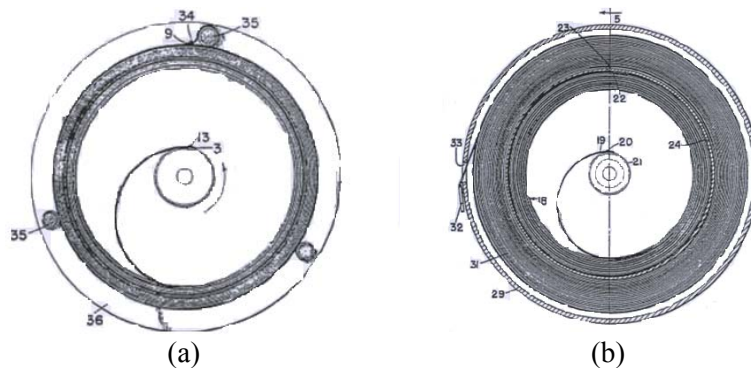


Figura 17. Propuesta de resorte con espiras bloqueadas en carcasa por Foster, 1965.

Los resortes anteriormente descritos pueden ser conectados en serie para aumentar el número de vueltas del conjunto, [Sadatomo, 1985] (*Figura 18*), desarrolla piezas intermedias entre los resortes que sirven de acople. El tipo de resortes es un fleje flexible de gran longitud y sección constante a lo largo de esta.

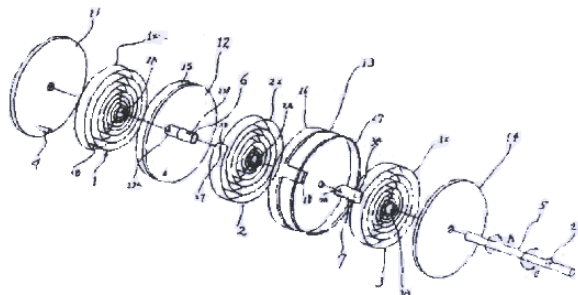


Figura 18. Propuesta de configuración serie de resortes por [Sadatomo, 1985].

Existen otros desarrollos de resortes espirales a torsión que pretenden alcanzar baja variabilidad en el par o sus aplicaciones más directas a diferentes entornos tecnológicos, pero que frecuentemente son pequeños accionamientos de baja potencia y energía [Foster, 1965; Kiyoshi, 1971; Park, 2004; Sadatoma, 1985; Society of Automotive Engineers, 1996; Spring Manufacturers Institute, 1991]. No se han encontrado trabajos relativos a la transferencia directa de los desarrollos expuestos a otros ámbitos tecnológicos, que requiera mayor par.

En los resortes analizados anteriormente, no se encontraba ningún enfoque analítico sobre su comportamiento. Uno de los escasos trabajos llevado a cabo por [Glasser, 1964], se analizan dichos resortes en función de los parámetros de diseño (*Figura 19*). Se requiere de la definición gráfica de ciertos coeficientes necesarios para la formulación numérica y ciertas variables del comportamiento del resorte. Así el estudio no es ni intuitivo ni permite realizar un diseño estructurado, ágil y metódico.

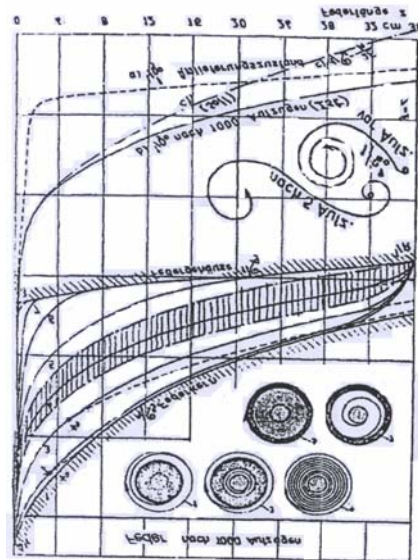


Figura 19. Planteamiento analítico propuesto por [Glasser, 1964].

Otro de los estudios analíticos es el llevado a cabo por [Xionggang, 1987], en el que se analiza la energía potencial máxima almacenable por unidad de volumen. En dicho trabajo se diferencia entre la energía suministrada por el resorte, la aprovechable y las pérdidas por transmisión en el caso de existencia de resortes motores y motrices. Para ello se analizan la precarga de espiras y el material de fabricación del fleje, obteniéndose la correlación entre longitud y espesor de fleje y entre radio y espesor para óptima energía almacenada. Dicho estudio plantea como óptimo una relación entre radio de carcasa y árbol de 3 con un valor normalizado de volumen entre resorte y carcasa de 0,5 y una relación entre par máximo y mínimo de

1,55, acompañando dichas conclusiones con diferentes gráficas de comparación y correlación entre parámetros de diseño.

Por otra parte [Swift, 1972 y 1973], plantea las condiciones para flexión pura en resortes espirales a torsión, a partir de las cuales se analiza el comportamiento del resorte con flujo de espiras bloqueadas entre la carcasa y el árbol, y las características de las espiras libres y bloqueadas tanto en árbol como en carcasa. Con dicho comportamiento se plantea la curva característica par – ángulo girado para diferentes parámetros de diseño como son el espesor, el material del fleje o las curvaturas de árbol y carcasa. Los resultados propuestos son validados con el ensayo de diferentes resortes.

Como se acaba de analizar en los planteamientos anteriores, tanto de forma genérica para resortes espirales a torsión como para aquellos que buscan una curva de baja variabilidad del par, los desarrollos analíticos para este tipo de resorte son escasos. La mayoría de los desarrollos se centran en un análisis de la forma genérica de la curva generatriz del resorte sin caracterizarla y sin poder expresar analíticamente el comportamiento del resorte y las características del fleje. Los resortes empleados eran constituidos principalmente por láminas de acero, las cuales no necesitaban, en principio, ni análisis pormenorizados y estudios para su optimización. Ninguno de ellos realiza un análisis metódico y estructurado de los diferentes factores de influencia de los resortes espirales a torsión que permita plantear un procedimiento de diseño no basado únicamente en la experiencia y en datos empíricos, que limitan las aplicaciones de los mismos fuera de sus correspondientes marcos de desarrollo. Sin embargo, las aplicaciones futuras de los resortes espirales a torsión, con el aumento de su rango de especificaciones y dimensiones, requieren estudios detallados y específicos que permitan su análisis y posible optimización.

Capítulo 3.- MODELO GENERALIZADO DE RESORTES ESPIRALES A TORSIÓN.

En este capítulo se analiza la base conceptual de los resortes espirales a torsión, se estudia y modeliza de forma metodológica, el comportamiento así como la influencia de los parámetros de diseño en la curva característica par – ángulo girado. Se plantea un procedimiento general partiendo de las especificaciones de diseño, curva característica a proporcionar y limitaciones de diseño, radio de árbol, carcasa, longitud y espesor del fleje. Conjuntamente al enfoque estático se plantea el modelo energético de comportamiento para cálculo de la curva característica y deformación de la carcasa.

3.1.- Modelización del comportamiento estático de los resortes espirales a torsión.

Un resorte espiral a torsión está constituido por un fleje (habitualmente con forma espiral) unido a una carcasa (normalmente como elemento fijo) y a un árbol (como elemento móvil). Según la curvatura de las espiras y la longitud del fleje, estas se pueden encontrar libres, bloqueadas en el árbol (si su curvatura es mayor que la de este) o bloqueadas en la carcasa (si su curvatura es menor que la de esta). Al aplicar par las espiras irán eventualmente desbloqueándose de la carcasa y bloqueándose en el árbol. (*Figura 20*).

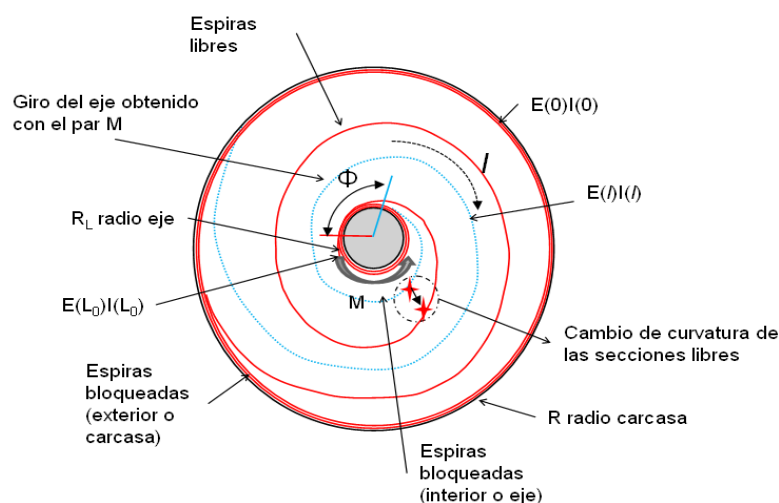


Figura 20. Descripción de los componentes de resorte espiral a torsión.

Se estudian los esfuerzos principales que existen en el fleje (flexión, cortadura y tracción-compresión de las espiras) y los posibles condicionantes que permitan la simplificación del problema (despreciar efectos de

cortadura y tracción – compresión, con lo que se puede suponer flexión pura), ante el requerimiento de obtener un comportamiento de par - ángulo girado especificado.

Cortadura.

La cortadura existirá en los resortes espirales a torsión siempre que se cumplan por lo menos una de las siguientes circunstancias

- Existencia de precarga del resorte, en situación de reposo el resorte en la carcasa ocupa menos que libre.
- La no introducción de un giro puro en el extremo del resorte, dicho efecto se reduce cuanto mayor sea la relación entre los diámetros de la carcasa y el árbol, siendo la tasa de reducción mayor a menor relación entre espesor del resorte y diámetro del árbol [De Carle, 1971]. Este efecto es despreciable respecto a la flexión cuando la relación entre el espesor y el radio del árbol es menor que 0,01.
- La deformada del resorte sea tal que su centro tienda a desplazarse hacia la carcasa y no se mantiene centrado.

Sin embargo el diseño y configuración del resorte puede, en parte, eliminar la distorsión sobre los esfuerzos y tensiones del fleje y por tanto sobre la curva par - ángulo girado. Así, por ejemplo el primero de los puntos anteriores puede ser evitado directamente con la selección de la espiral, la segunda con un sistema equilibrado y robusto de introducción del par sobre el fleje y la tercera se elimina directamente por ejemplo, con el uso de espirales tipo Breguet [Zaugg, A, 2010] o con una espiral que disponga de varias entradas axisimétricas (configuración de resortes en paralelo). De este modo, la cortadura sólo alcanza valores apreciables en las proximidades del árbol y de la carcasa, pero la contribución de la deformación por cortadura al giro del árbol será despreciable respecto a la de flexión. En cualquier caso, es necesario tenerla en cuenta para el dimensionamiento resistivo de dichas secciones.

Ensayos realizados (descritos posteriormente) demuestran también la aplicabilidad de estas hipótesis. Para la mayoría de los materiales es posible despreciar el efecto de la deformación por cortadura frente a la producida por flexión.

Tracción - compresión.

También suele despreciarse el efecto de la tracción – compresión frente a la flexión, de forma análoga de lo que ocurre con la cortadura. Para ello, se analiza una sección de espiral libre, sin bloquear, en el que el giro del árbol produce, en dicha sección, por una parte por flexión y otra por tracción – compresión. La

flexión, con tensiones normales a la sección del fleje alcanzan el valor σ_F , máximo en la superficie. Por otro lado tracción σ_T (al enrollarse el resorte) o compresión (al desenrollarse) toma unos valores constantes a lo largo de la sección del fleje. Sea la anchura del fleje b , a la anchura h y al radio de posicionamiento r , se realiza la siguiente comparación (*Figura 21*).

$$\left. \begin{aligned} M &= 2 \int_0^{h/2} \sigma \cdot b \cdot y \cdot dy \\ \sigma &= \frac{\sigma_F}{h/2} \cdot y \end{aligned} \right\} \quad M = 4 \cdot \frac{\sigma_F \cdot b}{h} \cdot \int_0^{h/2} y^2 \cdot dy = \sigma_F \cdot \frac{b \cdot h^2}{6} \quad \sigma_F \cdot \frac{b \cdot h^2}{6} = M = \sigma_T \cdot r \cdot h \cdot b \quad \sigma_T = \sigma_F \cdot \frac{h}{6 \cdot r} \quad (24)$$

Como se observa de la ecuación la tensión máxima a tracción-compresión, σ_T es mucho menor que la de flexión σ_F , siempre y cuando el espesor h sea mucho menor que el radio r . Dicha relación resulta ser habitual en el desarrollo de resortes espirales a torsión. De ahí que puedan ser considerados despreciables los efectos de la tracción - compresión frente a la flexión para este tipo de resortes.

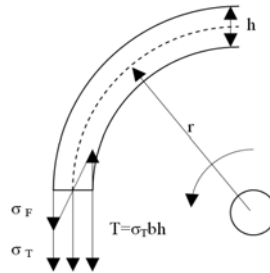


Figura 21. Esquema explicativo del efecto despreciable de la tracción-compresión frente al flector.

Flexión.

Al aplicar par, se produce un cambio de curvatura en las espiras libres, donde cada sección experimentará un cambio de curvatura proporcional al momento flector sobre ella. La constante de proporcionalidad es la rigidez a flexión de la sección del fleje (inercia por módulo de elasticidad de la sección). Así, la relación entre el ángulo girado por cada sección y el par ejercido, es lineal (tiene en principio la misma variación que la rigidez a flexión del fleje con la longitud), como se observa en la *Figura 22 (a)*. La contribución de todos esos cambios locales de curvatura son los que van a generar el giro del árbol del resorte. (*Figura 22 (b)*).

De forma genérica llamando $C_A(l)$ a la curvatura del fleje antes de aplicar par en una sección a una longitud l , y $C_B(l)$ a su curvatura bajo un par ΔM , se puede calcular el cambio de curvatura bajo dicha carga a partir del momento flector ΔM_F . Dicho valor también puede ser expresado alternativamente en función del radio de curvatura $\rho(l)$.

$$C_B(l) - C_A(l) = \frac{1}{\rho_B(l)} - \frac{1}{\rho_A(l)} = \frac{\Delta M_F(l)}{(E \cdot I)(l)} \quad (25)$$

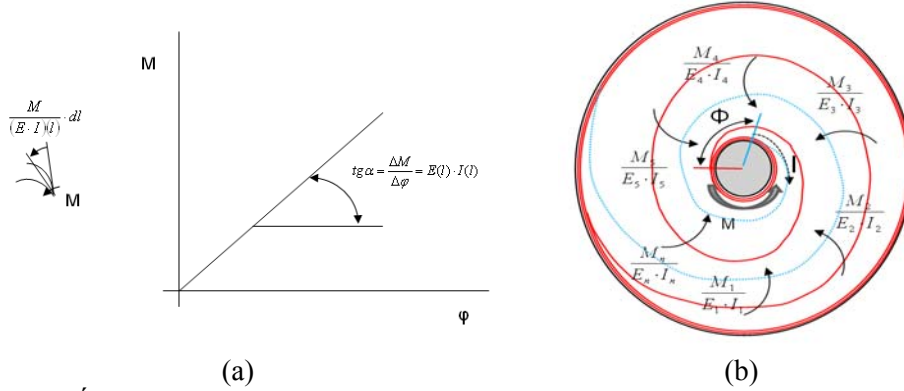


Figura 22. Ángulo girado por la sección del resorte y contribución general del cambio.

Para cada diferencial de longitud del fleje dl se cumple la siguiente relación entre el diferencial de ángulo girado y el radio de curvatura, para cualquier curva generatriz que lo constituya, (Figura 23)

$$dl = \rho(l) \cdot d\varphi \quad d\varphi = C(l) \cdot dl \quad (26-27)$$

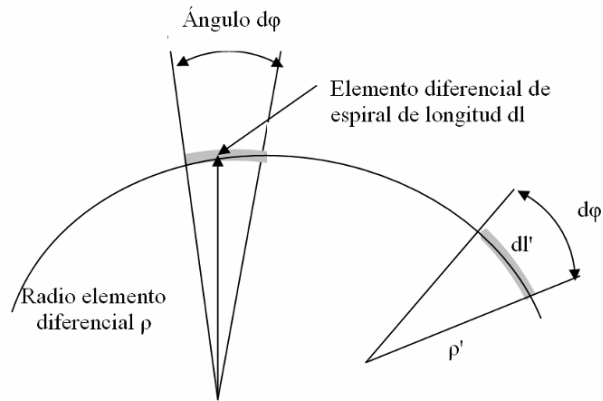


Figura 23. Parámetros de la formulación de resortes.

El ángulo $\Delta\Phi$ que gira el árbol con un par M dependerá del cambio de curvatura producido en la longitud libre del fleje,

$$\Delta\Phi = \int_{\text{longitud libre}} \frac{\Delta M(l)}{E(l) \cdot I(l)} dl \quad (28)$$

Por otro lado, puede hacerse que el fleje trabaje exclusivamente a flexión; que la cortadura y la tracción-compresión adicionales a las producidas en cada sección del fleje por la flexión sean prácticamente inexistentes (bajo las restricciones de epígrafes posteriores). En dichas condiciones no hay variación de la

longitud del fleje y puede ser considerado el par constante ($\Delta M(l)=\Delta M$). Por ello el giro $\Delta\Phi$ del árbol, producido al variar el par ΔM , puede expresarse

$$\Delta\Phi = \Delta M \int_{\text{longitud libre}} \frac{1}{E(l) \cdot I(l)} dl \quad (29)$$

Dicho incremento máximo de par, generado por el máximo cambio de curvatura, tiene como límite superior la resistencia del material que conforma el fleje. La utilización de materiales con alta elongación admisible va a posibilitar un mayor cambio de curvatura y por tanto un mayor ángulo girado para el mismo par aplicado, con menores dimensiones de la sección resistente. Bajo dicho planteamiento, cuando el fleje esté montado entre una carcasa y un árbol, el giro será la suma de las contribuciones de los cambios de curvatura de cada sección de la longitud libre del fleje.

De las consideraciones anteriores, en la mayoría de los casos, resulta que los esfuerzos principales a los que se va a ver sometido el fleje son los derivados de la flexión y no ni de la cortadura ni de la tracción - compresión.

3.1.1.- Factores de influencia para resortes con flejes de rigidez a flexión constante.

El análisis de la ecuación para la obtención de la curva par – ángulo girado permite definir un comportamiento diferente del resorte en función de las características de la sección resistente, del material empleado y longitud libre de espiras. En dichas circunstancias, con las hipótesis anteriores, se puede expresar el ángulo girado y par nominal, en vez de con la variación del ángulo girado e incremento de par, para un resorte montado en la carcasa. El caso más sencillo y de mayor implantación industrial, es el fleje con material y sección constantes, cuyo ángulo girado puede escribirse:

$$\Delta\Phi = \int_{\text{longitud libre}} \Delta\varphi \cdot dl = \int_{\text{longitud libre}} \frac{M}{E(l) \cdot I(l)} dl = \frac{M}{EI} \cdot \text{longitud libre} \quad (30)$$

Influencia de la longitud libre del fleje sobre el comportamiento del resorte.

La longitud libre va a depender de la relación existente entre las longitudes bloqueadas en el árbol y desbloqueadas en la carcasa (en el proceso de carga o de manera inversa en la descarga). En el caso de no existir bloqueo ni desbloqueo de espiras en la carcasa o en el árbol (es decir, si la curvatura de la carcasa es menor que la menor de las curvaturas del fleje, y la del árbol es mayor que la del fleje), la rigidez del resorte dependerá únicamente de la longitud del fleje. Si existe flujo de espiras bloqueadas y desbloqueadas, y estas no son iguales, la longitud libre del fleje variará con el giro del mismo.

Se generan así tres casos de análisis en función del aumento o disminución de la longitud útil de espiras libres generada por la mayor o menor relación entre bloqueo y desbloqueo:

- Si la longitud de fleje que se desbloquea de la carcasa, es igual a la longitud de fleje que se bloquea en el árbol, la longitud libre del fleje se mantiene constante. Con ello, la rigidez del resorte permanecerá igualmente constante, y el comportamiento par – ángulo girado será lineal.
- Si la longitud desbloqueada en la carcasa es menor que la bloqueada en el árbol, la longitud libre decrece al incrementar el par aplicado. Con lo que, la rigidez del resorte será creciente, así la curva par – ángulo girado va a tener una pendiente creciente.
- Si la longitud desbloqueada en la carcasa es mayor que la bloqueada en el árbol, la longitud libre crece, la rigidez es decreciente, y la curva par – ángulo girado va a tener una pendiente cada vez menos creciente, por lo que será progresivamente menos variable.

Por tanto la longitud libre del fleje, y la curva par - ángulo girado, va a depender de la relación de curvaturas del fleje con el par aplicado y las curvaturas de la carcasa y del árbol. Por ello, la espiral de fabricación (variación de la curvatura inicial con la longitud) va a ser también un factor influyente en la curva característica del resorte.

Influencia de la geometría de la espiral de fabricación sobre el comportamiento del resorte.

La importancia de la espiral de fabricación viene dada por la relación entre la curvatura del fleje antes de ser montado y la del árbol y carcasa, que va a implicar la existencia de espiras bloqueadas en estas. Sea un fleje de longitud genérica l , con curvaturas antes de montar a lo largo de la misma $C_1, C_2, C_3, C_4 \dots C_n$ y curvaturas del árbol y de la carcasa de valores $C_{\text{árbol}}$ y C_{carcasa} . En este análisis el radio de la carcasa se va a denominar R y el del árbol R_L . Se analizan las diferentes configuraciones posibles y las curvas características par – ángulo girado que se obtienen según variaciones de las curvaturas. En todos los casos se denomina par de montaje (M_{montaje}) aquel par que es necesario aplicar para que el fleje quede montado entre la carcasa y el árbol. Una vez montado, al dejar de aplicar par, dependiendo de las configuraciones de diseño, va a existir eventualmente un par remanente, que se denomina par de inicio (M_{inicio}). Por tanto, en función del valor del par de inicio la curva característica obtenida del resorte puede o no comenzar en valor nulo.

La primera tipología de curva característica se da en el caso de disponer de una carcasa con menor curvatura que la menor del fleje antes de ser montado, y la del árbol mayor que la mayor curvatura del fleje. En el proceso de carga se diferencian tres etapas diferentes (*Figura 24 (a)*). La primera de ellas se caracteriza por tener la longitud libre constante (ya que toda la espira se encuentra libre con curvaturas entre la de la

carcasa y el árbol) lo que implica una rigidez constante. La segunda zona, a partir del par M_e , se genera al comenzar el bloqueo de espiras en el árbol con espiras libres en el resto del fleje sin estar bloqueadas en la carcasa, ya que con dicho par la curvatura de las espiras es igual o mayor que la del árbol. Al generarse bloqueo en el árbol (sin posibilidad de desbloqueo en la carcasa) la longitud libre del fleje va a disminuir, por tanto la rigidez aumentará. Una vez bloqueada toda la longitud libre en el árbol (que corresponde al par máximo o par final, M_{final}), la rigidez de la curva característica del resorte será función de la rigidez a tracción de la sección bloqueada, produciendo una última zona en la curva característica con incremento de la pendiente y comportamiento asintótico cercano al vertical. Así la curva característica par – ángulo girado de un resorte con estas características, dispone de una primera zona con comportamiento lineal creciente, con pendiente constante y una segunda zona con rigidez creciente (Figura 24 (b)).

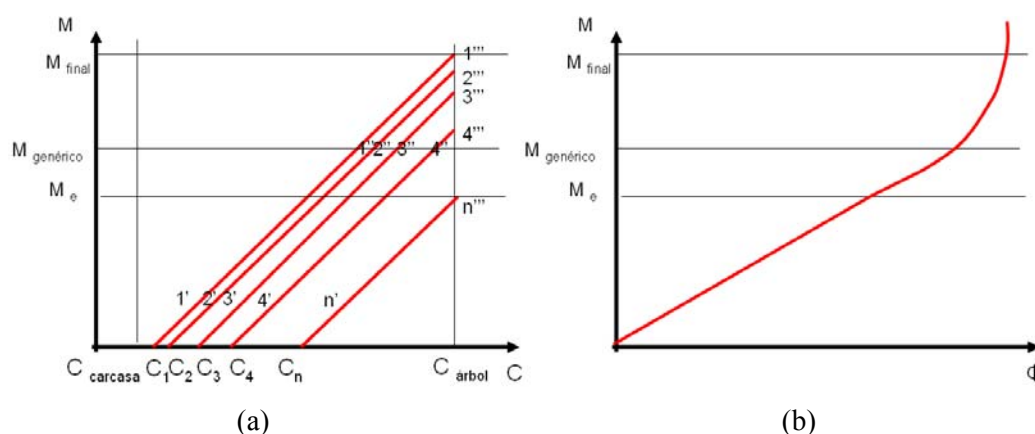


Figura 24. Curva característica de resorte con módulo resistente constante y curvaturas del fleje entre árbol y carcasa.

La figura anterior permite obtener de manera sencilla las nuevas curvaturas de las diferentes secciones del fleje para cada par aplicado, por lo que también es sencillo calcular la deformada de éste. Con esta metodología de representación, es posible conocer la longitud bloqueada tanto en árbol como en carcasa para cada par aplicado. De manera análoga es posible representar un fleje con rigidez a flexión variable disponiéndose de líneas convergentes o divergentes en vez de paralelas como representación de la variación par - curvatura para cada una de las secciones del fleje (la influencia del módulo resistente a flexión del eje es analizado posteriormente).

Otra de las situaciones que requiere de análisis es aquella que tiene una carcasa con mayor curvatura que la menor del fleje, por lo que la curvatura del fleje se encuentra siempre por debajo tanto de la de la carcasa como de la del árbol. Al instalar el fleje entre la carcasa y en el árbol, van a existir desde el principio espiras bloqueadas en la carcasa antes de comenzar a aplicar par. Sin embargo para pares inferiores al de inicio las

espiras se encuentran bloqueadas en la carcasa. Esta configuración se puede observar gráficamente en la *Figura 25*.

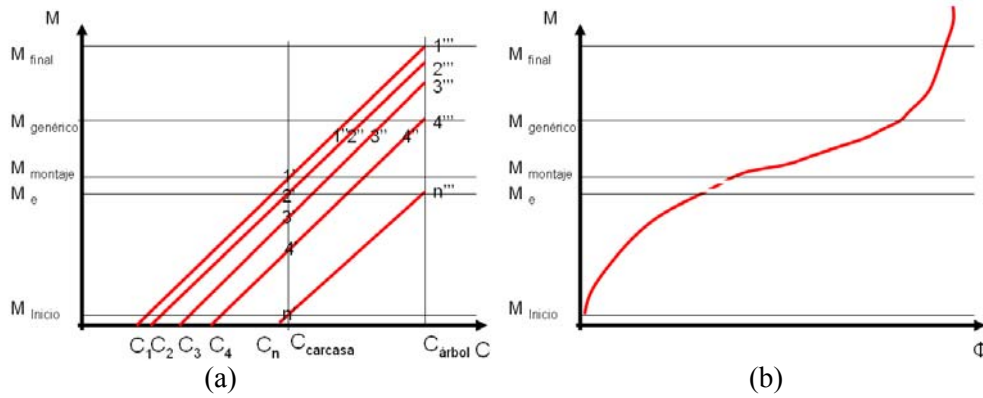


Figura 25. Representación gráfica de un resorte con curvatura en carcasa mayor que la espira más externa.

En este tipo de resortes se pueden observar diferentes zonas de comportamiento. Desde el par de inicio hasta el par M_e se produce el desbloqueo de espiras de la carcasa, sin bloqueo de las mismas en el árbol, lo que implica un aumento de la longitud libre del fleje, con lo que la variabilidad del par será decreciente. Desde el par M_e hasta el par de montaje M_{montaje} sigue existiendo desbloqueo en la carcasa, pero con bloqueo simultáneo en el árbol. En esta situación la longitud útil puede crecer o decrecer, dependiendo de la evolución con la longitud de las curvaturas del fleje antes de ser montado y de las rigideces a flexión de cada sección, como será estudiado posteriormente. Por dicho motivo en la *Figura 25 (b)* dicho tramo se representa con línea discontinua. Así para un par genérico, $M_{\text{genérico}}$, que se encuentra entre el par de montaje M_{montaje} y el par final M_{final} , ciertos puntos de la longitud del fleje se encuentran bloqueados en el árbol mientras que otros se encontrarán libres. La última zona de comportamiento diferenciada en la gráfica, es aquella en la que todo el fleje se encuentra bloqueado en el árbol. La curva obtenida tendrá una rigidez dependiente de la rigidez a tracción con una representación asintóticamente vertical en la curva de comportamiento.

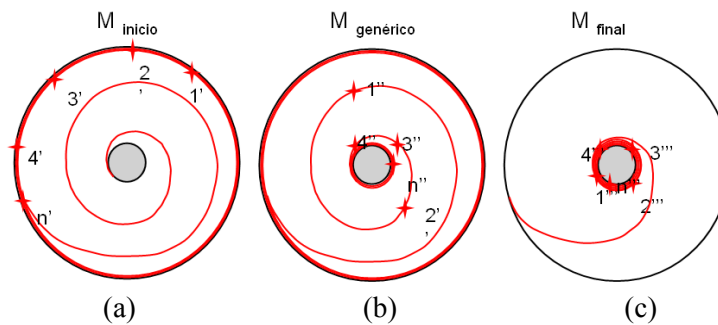


Figura 26. Representación gráfica de las espiras del resorte para diferentes pares de funcionamiento.

Para los diferentes pares de la curva característica, es posible representar la posición de cada una de las espiras y conocer si se encuentran libres, bloqueadas en la carcasa o bloqueadas en el árbol (*Figura 26*). Para el par de inicio, los puntos de estudio del resorte representados por $1', 2', 3', 4' \dots n'$ derivados de la curvaturas de fabricación $C_1, C_2, C_3, C_4 \dots C_n$, se encuentran bloqueados sobre la carcasa (*Figura 26 (a)*). El último punto del fleje, denominado n , se encuentra en el límite, con lo que, al aplicar par tendrá una curvatura menor que la de la carcasa y dejará de estar bloqueado sobre esta, pasando a constituir parte de la longitud libre. Otro de los pares representados, uno genérico $M_{genérico}$ se encontraría por encima del de montaje (*Figura 26 (b)*). Los puntos $1'', 2''$ y $3''$ se encuentran con curvaturas comprendidas entre el árbol y la carcasa (formando parte de la denominada longitud libre del resorte), mientras que el resto, $4'' \dots n''$ se encuentra bloqueados sobre el árbol. La última posición representada, hace referencia al par final de funcionamiento M_{final} (*Figura 26 (c)*), donde todo el fleje se encuentra bloqueado en el árbol, ya que su curvatura es igual a mayor que la de este.

La última de las situaciones de importancia analizadas es un resorte con curvatura del árbol mayor que la mayor del fleje y curvatura de la carcasa mayor que la menor del fleje (*Figura 27 (a)*). En la curva de comportamiento del resorte se pueden observar tres zonas diferenciadas (*Figura 27 (b)*). La primera de ellas, entre el par inicial y la finalización del desbloqueo en la carcasa (par denominado M_e), se caracteriza por el desbloqueo de espiras en la carcasa con bloqueo en el árbol. La longitud útil puede crecer o decrecer, según el resto de factores de influencia, por lo que la representación gráfica se dispondrá en línea de trazos. La segunda de las zonas está comprendida entre el par M_e y el de finalización del bloqueo de espiras en el árbol M_{final} . En dicha zona se produce una disminución de la longitud útil debido a que toda la longitud desbloqueada en la carcasa se encuentra como longitud libre y por tanto, se produce un bloqueo en el árbol sin desbloqueo en la carcasa. Esto implica una disminución de la longitud libre, por lo que el resorte tiene una curva característica con mayor pendiente. La última zona es el trabajo exclusivo del fleje enrollado completamente en el árbol, cuyo comportamiento viene fijado por la rigidez a tracción de la sección bloqueada.

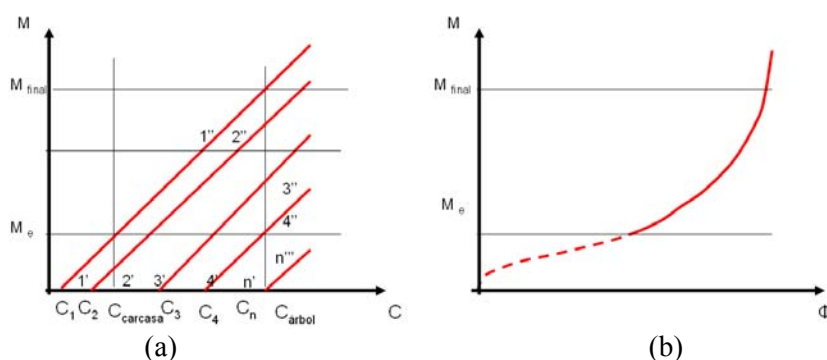
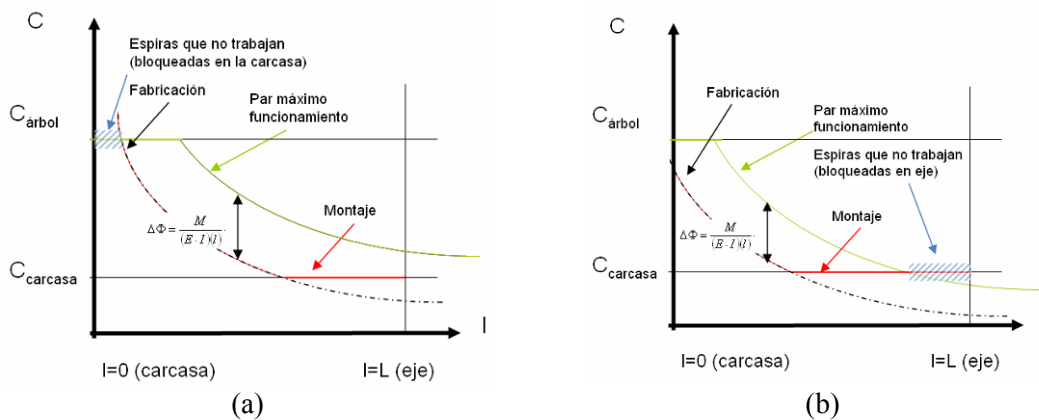


Figura 27. Representación gráfica de un resorte con zona de tránsito de espiras entre carcasa y árbol.

La casuística mostrada anteriormente puede ocasionar, en ciertos casos, que un determinado grupo de espiras no vayan a funcionar durante todo el rango de trabajo del resorte. En función de la curvatura de las mismas y su relación con la de la carcasa y la del árbol, puede darse que algunas de ellas tengan mayor curvatura que la de la carcasa o menor que la del árbol en el rango completo de funcionamiento, y por tanto nunca desbloquearse y así no contribuir a la curva característica del resorte. Podrán existir espiras bloqueadas en la carcasa para el par máximo de bloqueo en el árbol o espiras bloqueadas en el árbol desde el par inicial. Por ello dichas espiras no tendrán ninguna funcionalidad y deberá diseñarse sin que existan. Se analiza la variación de la curvatura con la longitud del fleje tanto en la fabricación y montaje como para el par máximo de funcionamiento, en relación con la curvatura de la carcasa y del árbol.



En la Figura 28 se observan los dos posibles casos de falta de optimización de las espiras bloqueadas. En la primera de ellas (Figura 28 (a)) existen espiras bloqueadas en la carcasa y en la segunda de ellas bloqueo de espiras en el árbol (Figura 28 (b)), pudiéndose dar también el caso de falta de optimización en ambos.

La correlación curvaturas - longitud optimizada (Figura 29), muestra que a par máximo no tiene ninguna espira bloqueada en la carcasa y a par mínimo no existen espiras bloqueadas en el árbol. En todas estas gráficas pueden observarse tres curvas diferentes: fabricación, montaje y par máximo de funcionamiento. La diferencia entre ellas vendrá dada por el cociente entre el par aplicado y la rigidez a flexión. Se han representado curvas paralelas suponiendo que la rigidez a flexión es constante con la longitud. Si no fuese eso así, en la representación gráfica en la que las curvas serían convergentes o divergentes según que la variación de la rigidez a flexión con la longitud sea creciente o decreciente.

Una vez analizados las principales configuraciones relativas de la curvatura del fleje respecto a la carcasa y el árbol, se plantea una metodología para cuantificar dichos efectos, y que permita predeterminar el comportamiento del resorte en función de los factores de influencia de la curva característica.

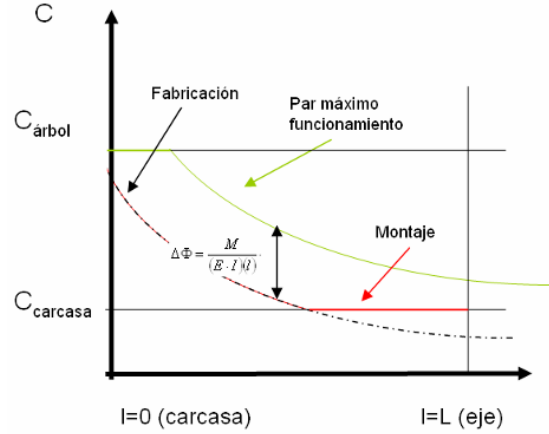


Figura 29. Existencia de espiras con optimización de su funcionamiento.

Al haberse despreciado el efecto de la tracción - compresión, la longitud total del resorte, L_0 , es constante. La longitud total se puede obtener a partir de la variación de la curvatura a lo largo de todo el fleje o mediante la contribución de la longitud libre y las bloqueadas tanto en el árbol como en la carcasa. Para las longitudes bloqueadas en la carcasa y en el árbol las curvaturas tendrán unos valores constantes, inversamente proporcionales a los radios de los mismos l/R y l/R_L . Los ángulos de bloqueo se denominarán $\beta(M)$ y $\theta(M)$ y las longitudes bloqueadas en función de los ángulos serán $R \beta(M)$ y $L_0 - R_L \theta(M)$ respectivamente. Las longitudes de bloqueo tanto en árbol como en carcasa, son función del par y de la rigidez a flexión del fleje a lo largo de la longitud y serán calculadas en función de la curvatura que tiene el fleje deformado en función del par. De forma genérica se podrá escribir $\beta(M)$ y $\theta(M)$, aunque por simplicidad en ciertas partes del desarrollo se expresarán como β y θ .

La longitud total del fleje fabricado su se calcula a partir del ángulo φ_0 , ángulo total recorrido por la espiral de fabricación siendo $C_0(l)$ y $\rho_0(l)$ la curvatura y el radio de curvatura de fabricación del fleje.

$$L_{TOTAL} = \int_0^{\varphi_0} \rho_0(l) \cdot d\varphi = \int_0^{\varphi_0} \frac{1}{C_0(l)} \cdot d\varphi = L_0 = cte \quad (31)$$

Para el análisis de la curva par ángulo girado del resorte se debe tener en cuenta que el ángulo girado por el resorte, para un par dado $\Phi(M)$. Es obtenible mediante las contribuciones al giro de las espiras libres $\Phi_l(M)$ y las bloqueadas en el árbol $\theta(M)$ y en la carcasa $\beta(M)$.

$$\Phi(M) = \Phi_l(M) + \beta(M) + \theta(M) \quad (32)$$

Para obtener cada uno de los citados giros se plantea la relación entre las curvaturas y el par aplicado en el resorte y entre la curvatura de fabricación y la longitud del fleje (Figura 30). Para dos pares genéricos con

valores M_A y M_B , la longitud desbloqueada en la carcasa debe ser la longitud comprendida entre las curvaturas C_{HA} y C_{HB} en el resorte fabricado, mientras que la longitud bloqueada en el árbol debe encontrarse entre las curvatura de fabricación C_{SA} y C_{SB} . Por tanto, a partir de la relación curvatura de fabricación - longitud del fleje, es posible realizar el cálculo de las nuevas longitudes bloqueadas, que tendrán un valor de (L_0-L_{SB}) en el desbloqueo en el árbol y de $(L_{HA}-0)$ en el bloqueo en la carcasa. Así la longitud desbloqueada en la carcasa tendrá un valor de $(L_{HB}-L_{HA})$ mientras que la del árbol de $(L_{SB}-L_{SA})$. Con dichos valores es posible realizar el cálculo del incremento de la longitud libre, al ser la diferencia de la longitud bloqueada y desbloqueada.

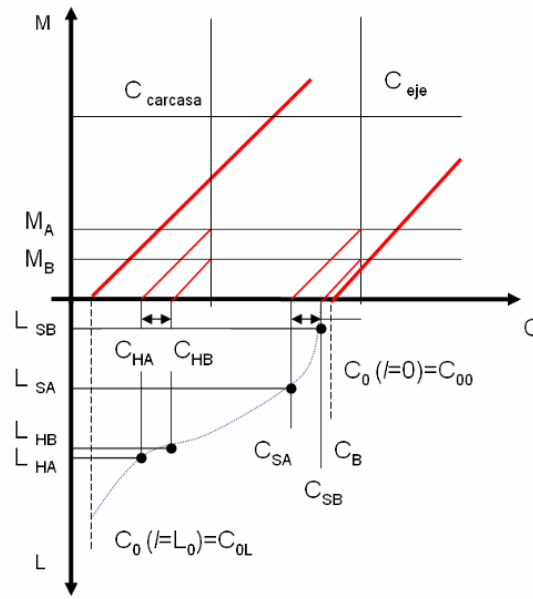


Figura 30. Gráfica que relaciona par, curvaturas y longitud del fleje.

Una vez calculadas las longitudes bloqueada y desbloqueada, el ángulo girado por el resorte, para un determinado incremento de par aplicado, puede ser calculado, al ser la suma del ángulo girado por las espiras bloqueadas en la carcasa con valor L_{HA}/R , en el eje $(L_0-L_{SB})/R_L$ y el ángulo girado por las espiras libres.

Dichas correlaciones permiten construir la curva característica definida a partir del ángulo girado por las espiras libres y los bloqueadas en la carcasa y en el árbol, al conocerse la curvatura de cada una y compararlas con las curvaturas fijas, del árbol y de la carcasa. Así se pueden obtener los valores de longitud libre, bloqueada en árbol y en carcasa.

$$\Phi_i(M) = \int_{L_{HA}}^{L_{SB}} \left(C_0(l) + \frac{M}{(E \cdot I)(l)} \right) \cdot dl \quad (33)$$

$$L_{HA} = \begin{cases} l / C_0(l) + \frac{M}{EI(l)} = \frac{1}{R} \\ 0 \text{ si } C_0(0) + \frac{M}{EI(0)} > \frac{1}{R} \\ L_0 \text{ si } C_0(L_0) + \frac{M}{EI(L_0)} < \frac{1}{R} \end{cases} \quad (34)$$

$$L_{SB} = \begin{cases} l / C_0(l) + \frac{M}{EI(l)} = \frac{1}{R_L} \\ 0 \text{ si } C_0(L_0) + \frac{M}{EI(L_0)} < \frac{1}{R_L} \\ L_0 \text{ si } C_0(0) + \frac{M}{EI(0)} > \frac{1}{R_L} \end{cases} \quad (35)$$

Por tanto las ecuaciones planteadas anteriormente permiten adicionalmente cuantificar las contribuciones al ángulo girado de cada uno de los factores de influencia.

Influencia del tipo de espiral sobre el comportamiento del resorte.

La relación entre longitudes de desbloqueo y bloqueo analizado, tiene principalmente dos parámetros de influencia: la dispersión de curvaturas de la espiral de fabricación y la variación de la rigidez a flexión del fleje a lo largo de la longitud. Con el aumento de la dispersión de curvaturas (siendo estas positivas), mayor será la fracción de longitud del fleje que se concentra en curvaturas bajas (espiras externas) y menor la que se concentra en curvaturas altas (espiras internas). Este hecho se analiza, por ejemplo, al comparar una espiral de Arquímedes y una exponencial (*Figura 31*). Una espiral de Arquímedes, con ángulo mínimo de 6,28 radianes y máximo 62,8 radianes tiene comprendida entre curvaturas de 0,1 y 0,2 m⁻¹ aproximadamente 600 unidades de longitud. Mientras tanto, una espiral análoga pero exponencial de grado 1,2 (mayor que en el caso de la espiral de Arquímedes) va a tener entre los mismos valores de aproximadamente 1600 unidades de longitud, casi 2,5 veces mayor.

De forma genérica, si se dispone de dos curvatura que se designarán con los subíndices 1 y 2, (y que corresponderían a la espiral de Arquímedes y exponencial anteriormente analizadas). Se puede cuantifica el efecto de la variación de las curvaturas con la longitud y comparar el valor de la curvatura y de su variación respecto a la longitud,

$$C_1(l) > C_2(l) \quad \frac{\partial C_1(l)}{\partial l} > \frac{\partial C_2(l)}{\partial l} \quad (36)$$

Nótese que, como la curvatura de la espiral deformada con el par depende de la curvatura inicial y del cociente entre el par aplicado y la rigidez a flexión, y estos últimos son iguales para ambos resortes, la correlación de curvaturas es directa a la correlación de curvaturas de fabricación.

$$C_{01}(l) > C_{02}(l) \quad \frac{\partial C_{01}(l)}{\partial l} > \frac{\partial C_{02}(l)}{\partial l}$$

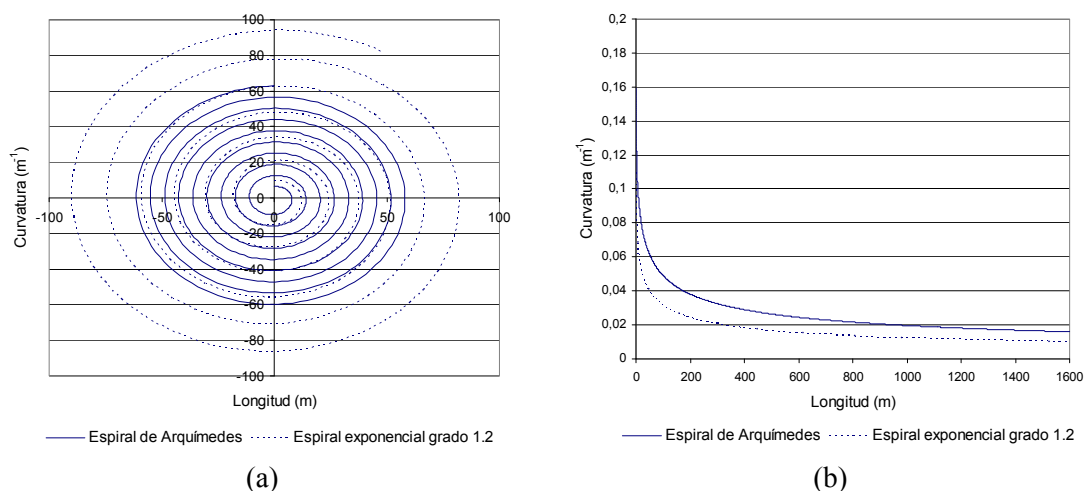


Figura 31. Espiral y variación de curvatura con longitud para Arquímedes y exponencial grado 1,2.

Así, para una misma longitud bloqueada, tanto en árbol como en carcasa, la curva 1 tendrá una mayor curvatura y una mayor pendiente que la curva 2, o lo que es lo mismo, para una misma curvatura, la longitud bloqueada en el resorte con curva 1 será mayor que en la curva 2. Estos mayores valores de longitud bloqueada, permiten obtener mayor longitud útil del resorte (ya que para un mismo incremento de curvatura se produce una mayor longitud desbloqueada en la carcasa o menor longitud bloqueada en el árbol), y por tanto una menor variabilidad del par.

Por otra parte, la longitud de fleje desbloqueada de la carcasa será mayor en espirales con una dispersión de curvaturas elevada. Así, el resorte con espiral exponencial desbloqueará más que el Arquímedes (pues su grado mayor), para la misma longitud total del fleje. De igual manera, a mayor dispersión de curvaturas, menor longitud de fleje bloqueado. Para iguales incrementos de curvatura, con mayor curvatura inicial se generan menores longitudes comprendidas en el incremento de curvatura constante. Por tanto, en la zona de bloqueo y desbloqueo simultáneo, la espiral exponencial proporcionará un par menos variable que la de Arquímedes.

En la representación gráfica de la curva característica de los dos resortes se observan los comportamientos descritos anteriormente (Figura 32). Se representan, para cada par aplicado dentro del rango de funcionamiento, las variaciones de longitud bloqueada o desbloqueada Δl y del ángulo girado por el resorte $\Delta \Phi$. En ambas gráficas existe una primera zona de comportamiento con pendiente decreciente, que va desde el par inicial hasta un valor M_s , correspondiente al momento de bloqueo sobre el árbol de la primera espira del fleje. El decrecimiento en la curva se acrecenta desde el par M_s hasta M_e , aquel en el que la última sección del fleje desbloquea de la carcasa. Entre dichos valores, se van a desbloquear espiras de la carcasa y no se bloquean en el árbol, con el consiguiente aumento de la longitud útil. La última zona, a partir del par

M_e hasta el par máximo de funcionamiento, tiene una rigidez creciente debido a que está produciendo bloqueo de espiras en el árbol sin posibilidad de desbloqueo en la carcasa. Al comparar el comportamiento de los dos resortes, se observa que el ángulo girado por la espiral exponencial de grado 1,2 es mayor, para la misma variación de par, que en la espiral de Arquímedes. Este efecto se incrementa con el aumento del grado de la exponencial.

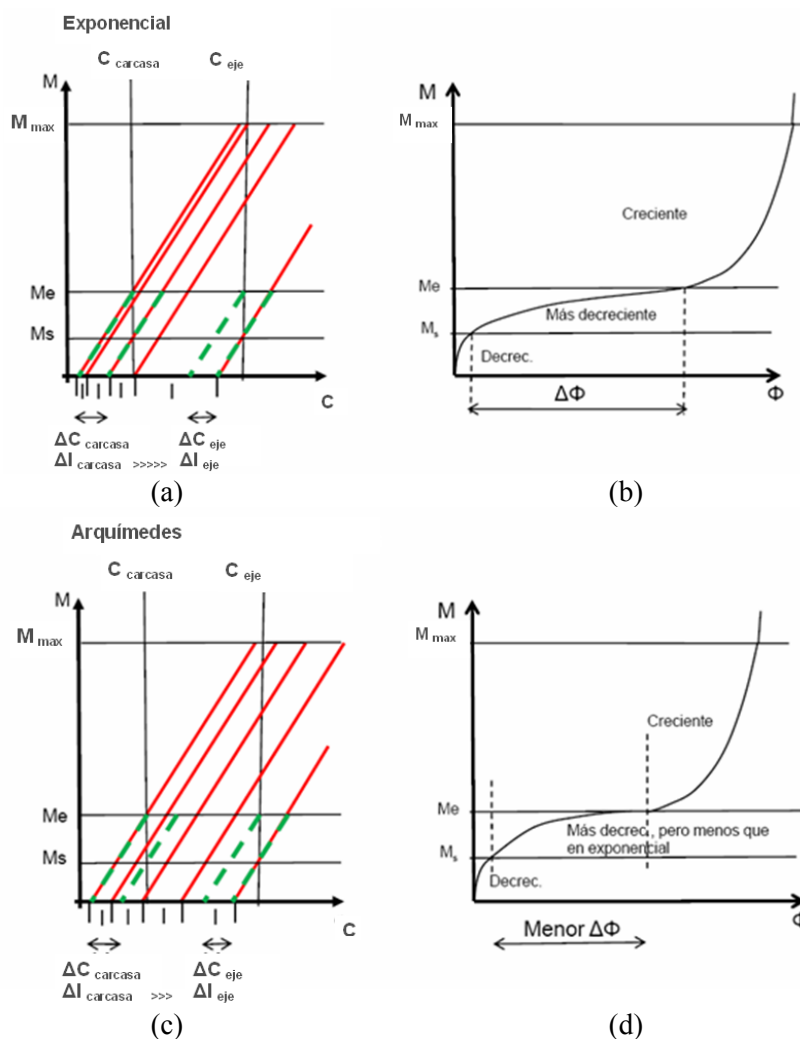


Figura 32. Curvas características para espiral exponencial y de Arquímedes.

Los planteamientos anteriores han sido realizados bajo la hipótesis de curvaturas positivas. Para un mismo incremento de cambio de curvatura, el aumento de curvaturas produce menor variación de la longitud en dicho incremento. Sin embargo, para curvaturas negativas esto no ocurre de la misma forma, para el mismo cambio de curvatura, al disminuir la longitud (valor más negativo) la longitud incorporada a dicho cambio de curvatura sería menor. Así, en el desarrollo de un resorte espiral a torsión, cuando todas las curvaturas del fleje a lo largo de la su longitud tienen el mismo signo, son aplicables los planteamientos

anteriores. Sin embargo, cuando se disponga de un resorte con cambios de signo de las curvaturas es necesario realizar un análisis ex proceso de su comportamiento.

3.1.2.- Influencia de la variación de la rigidez a flexión sobre el comportamiento del resorte.

La variación de la rigidez a flexión a lo largo de la longitud del fleje puede ser obtenida mediante variación de las dimensiones de la sección resistente y/o de su módulo de elasticidad. La variación de la geometría de la sección resistente se puede conseguir en el caso de una sección rectangular, una de las más fáciles de fabricar y con mayor empleo industrial, variando anchura y/o espesor. La variación de la elasticidad se logra variando los materiales empleados o las propiedades de los mismos a lo largo de la longitud del fleje. El uso de materiales compuestos permite fácilmente variar las proporciones de fibra y/o resina a lo largo de la longitud.

Esta característica de diseño también genera una variación de la pendiente de la gráfica par – ángulo girado (*Figura 33*). El efecto sobre el bloqueo y desbloqueo de espiras es análogo al producido por una mayor dispersión de las curvaturas (longitud cada vez mayor para los mismos incrementos de curvatura). A igualdad del resto de parámetros y mismo incremento de par, una menor rigidez a flexión del fleje, va a causar un mayor cambio de curvatura de sus secciones, por lo que, mayor será el número de vueltas del árbol. Si la rigidez a flexión disminuye, para secciones cada vez más cercanas a la de menor curvatura, los cambios de curvatura obtenidos, para mismos incrementos de par, serán cada vez mayores. Este efecto favorece el incremento de la longitud libre y la disminución de la pendiente de la curva par – ángulo girado.

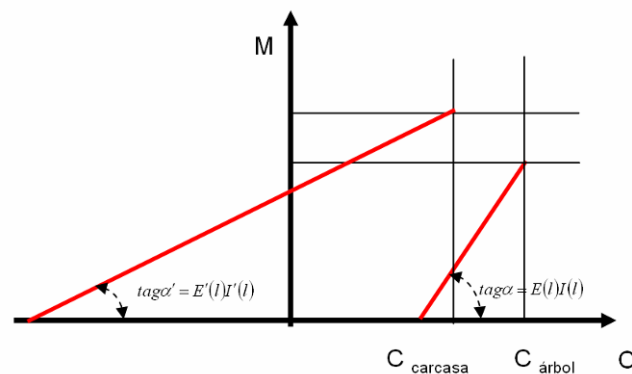


Figura 33. Variación de la representación del resorte con aumento de la inercia de la sección del fleje.

En el diseño y variación del módulo resistente a lo largo de la longitud del fleje debe tenerse precaución en que la pendiente de las rectas que representan a las secciones inicial y final no tengan tal variación, que se produzca la intersección gráfica entre ellas, antes de alcanzar el par máximo de diseño. Esto implicaría la no

realización práctica del diseño propuesto, ya que entonces la curvatura inicial del fleje sería menor que la curvatura final y esto implicaría un punto en el que dos secciones tendrían para una misma longitud la misma curvatura para un mismo par. Esto no es posible de materializar, lo que implica que es necesario evitar este tipo de diseños.

Tabla 2. Factores de influencia sobre el comportamiento de resortes torsionales.

Factor de influencia	Característica del resorte	Influencia sobre el diseño
Curvaturas fabricación $C_0(l)$	• Curvatura mayor del fleje mayor que la del árbol.	• Bloqueo inicial en el árbol.
	• Curvatura menor del fleje menor que la de la carcasa.	• Bloqueo en la carcasa.
	• Curvatura inicial entre árbol y carcasa	• No espiras bloqueadas inicialmente.
Tipo de espiral $C(l)$	• Espiral con alta dispersión de curvatura.	• Mayor longitud desbloqueada en carcasa y menor longitud bloqueada en árbol (aumento longitud libre).
	• Espiral con baja dispersión de curvatura.	• Menor longitud desbloqueada en carcasa y mayor longitud bloqueada en árbol (disminución longitud libre).
Longitud libre del fleje $EI(l)$, $C(l)$ y $M(l)$	• Longitud bloqueada árbol igual a desbloqueada en carcasa.	• Longitud libre constante (rigidez constante del resorte).
	• Longitud bloquea árbol menor a desbloqueada en carcasa.	• Longitud libre creciente (variación decreciente de la rigidez con el ángulo girado).
	• Longitud bloquea árbol mayor a desbloqueada en carcasa.	• Longitud libre decreciente (variación creciente de la rigidez con el ángulo girado).
Variación rigidez del fleje $EI(l)$	• $\frac{\partial(EI)(l)}{\partial l} < 0$	• Mayor cambio de curvatura y ángulo girado.
	• $\frac{\partial(EI)(l)}{\partial l} > 0$	• Menor cambio de curvatura y ángulo girado.

Para cuantificar el efecto de variación de la rigidez a lo largo de la longitud, se debe analizar el efecto sobre la longitud libre del fleje. Así, como la longitud total permanece constante, la influencia se concentrará en las longitudes bloqueadas. Para el aumento de la longitud libre, en el caso de bloqueo y desbloqueo simultaneo, la longitud bloqueada en el árbol deberá ser menor que la desbloqueada en la carcasa. La relación entre ambas longitudes equivale a la relación entre los ángulos girados por las espiras bloqueadas tanto en la carcasa como en el árbol, que dependen de la curvatura del resorte deformado para el par de bloqueo en árbol o en carcasa. Así la longitud libre aumentará con la disminución de la rigidez a flexión en

las espiras de la carcasa respecto al fleje, ya que se conseguirá un mayor ángulo de bloqueo en la carcasa y un menor ángulo de bloqueo en el árbol.

$$\begin{aligned}
 C_M(l) &= C_0(l) + \frac{M}{E(l) \cdot I(l)} & \frac{\partial C_M(l)}{\partial l} &= \frac{\partial C_0(l)}{\partial l} + M \cdot \frac{\partial}{\partial l} \left(\frac{1}{E(l) \cdot I(l)} \right) \\
 \frac{\partial(EI)_1(l)}{\partial l} &> \frac{\partial(EI)_2(l)}{\partial l} & L_1^{LIBRE}(M) &> L_2^{LIBRE}(M)
 \end{aligned} \tag{37}$$

Los planteamientos y análisis anteriores, permiten definir y diseñar resortes en función de las especificaciones de cada aplicación concreta. Se resume en la *Tabla 2* la influencia de los factores anteriormente analizados que van a servir como base para la definición de un procedimiento sistemático de desarrollo de este tipo de resortes.

3.2.- Conceptualización del procedimiento de diseño.

Anteriormente se ha realizado un análisis de los diferentes factores de influencia en el diseño de resortes espirales a torsión. A partir de ellos es posible plantear un procedimiento de diseño en función de las condiciones de funcionamiento y de las restricciones o limitaciones de diseño. Obsérvese (*Figura 34*) que la diferencia entre resortes con mucha y poca variabilidad de par radica en el rango útil de cambios de curvatura respecto al potencial (hasta alcanzar la tensión admisible) de cada una de las secciones del fleje: grande para par variable y pequeña para baja variabilidad. Además de grandes longitudes desbloqueadas y pequeñas bloqueadas obtenible a través de dispersión de curvaturas o de rigidez a flexión. Ello implica las elevadas longitudes (con grandes pesos) necesarios en resortes con baja variabilidad del par.

Las especificaciones de diseño requeridas son la curva característica a desarrollar (que consistirá en par máximo, vueltas máximas a dar por el árbol y la curva par-vueltas requeridas) así como las restricciones de diseño, valores admisibles de cambios de curvatura, espesor y altura del fleje. Según dichas especificaciones se debe seleccionar el material de fabricación del fleje. En general, a menor rigidez mayor número de vueltas, para el mismo incremento de par.

Una vez conocidas las especificaciones de diseño se debe definir la sección resistente, selección del material y cambio de curvatura aplicado a cada una de las secciones a lo largo de la longitud del fleje. En dicha selección se pueden tener en cuenta diferentes criterios, tales como, maximización de la densidad de energía, cortadura existente, coste o tamaño; aplicándose criterios resistivos conjuntamente con las limitaciones de diseño planteadas. Con dichos datos se puede establecer una tabla de selección para diferentes tipos de material, forma geométrica y dimensiones de la sección resistiva. Como resultado final de

dicha tabla de decisión deberá quedar definido tanto el material a emplear como la forma geométrica de la sección.

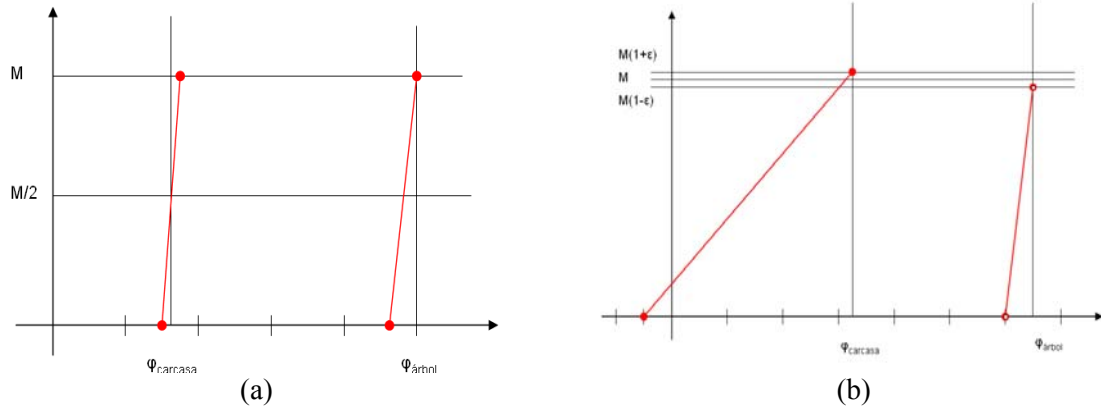
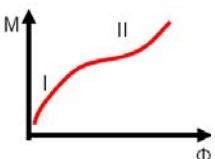
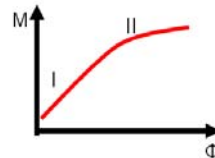
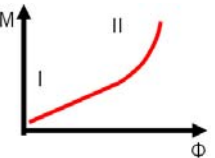
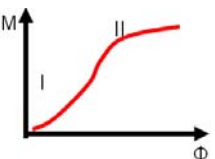



Figura 34. Forma de las gráficas curvatura – par para resortes de par variable y de baja variabilidad.

Conocidos los datos anteriores se debe seleccionar el tipo de espiral y la variación del módulo resistente, teniendo en cuenta un compromiso entre el tipo de espiral, tamaño y rigidez a flexión. Téngase en cuenta que diferentes combinaciones de parámetros de diseño pueden obtener una misma curva característica del resorte. En la *Tabla 3* se observan diferentes alternativas de diseño en función de la curva característica del resorte a obtener. Se han analizado las curvas con dos tramos diferenciados de comportamiento. En el caso de requerirse tres zonas diferenciadas o más, el proceso sería análogo pero teniendo en cuenta que la variación segunda del par con el ángulo es negativo $\partial^2 M / \partial \Phi^2 < 0$ (sin definición explícita de $\partial EI(l) / \partial l$) sólo es obtenible recurriendo al bloqueo en la carcasa. De igual manera que la variación segunda del par con el ángulo es positivo $\partial^2 M / \partial \Phi^2 > 0$ sólo es obtenible recurriendo al bloqueo en el árbol, si este debe darse para el ángulo máximo.

Tabla 3. Factores de influencia sobre la curva característica del resorte.

	$\partial^2 M / \partial \Phi^2$		$\partial^2 C / \partial l^2$	$\partial EI(l) / \partial l$	Bloqueo	
	Zona M_I	Zona M_{II}			Carcasa	Árbol
	< 0	$= 0$	Indiferente (mayor pendiente cambio en par cuanto mayor es el cambio de curvatura)	Indiferente (mayor pendiente cambio en par cuanto mayor es el cambio de EI)	Si $M < M_{II}$	No
			Indiferente $M < M_{II}$ y cero $M > M_{II}$	Indiferente $M < M_{II}$ y constante $M > M_{II}$	Si para todo M	Si $M > M_{II}$
			Indiferente $M < M_{II}$ y positivo $M > M_{II}$	Indiferente $M < M_{II}$ y positivo $M > M_{II}$	Si para todo M	No para todo M
			Indiferente $M < M_{II}$ y negativo $M > M_{II}$	Indiferente $M < M_{II}$ y negativo $M > M_{II}$	Si para todo M	No para todo M
	< 0	> 0	Indiferente (mayor	Indiferente (mayor	Si	Si $M > M_{II}$

			pendiente cambio en par cuanto mayor es el cambio de curvatura)	pendiente cambio en par cuanto mayor es el cambio de EI)	$M < M_{II}$	
			Indiferente $M < M_{II}$ y creciente $M > M_{II}$	Indiferente $M < M_{II}$ y creciente $M > M_{II}$	Si para todo M	Si $M > M_{II}$ mayor en árbol que en carcasa
			Indiferente $M < M_{II}$ y positivo $M > M_{II}$	Indiferente $M < M_{II}$ y positivo $M > M_{II}$	Si $M < M_{II}$	No para todo M
			Indiferente $M < M_{II}$ y negativo $M > M_{II}$	Indiferente $M < M_{II}$ y negativo $M > M_{II}$	Si $M < M_{II}$	Si $M > M_{II}$ mayor en árbol que en carcasa
	$= 0$	< 0	Cero $M < M_{II}$ e indiferente $M > M_{II}$ (mayor pendiente cambio en par cuanto mayor es el cambio de EI)	Constante $M < M_{II}$ e indiferente $M > M_{II}$ (mayor pendiente cambio en par cuanto mayor es el cambio de EI)	Si $M > M_{II}$	No
			Cero $M < M_{II}$ e indiferente $M > M_{II}$.	Constante $M < M_{II}$ e indiferente $M > M_{II}$.	Si para todo M	Si $M > M_{II}$
			Positivo $M < M_{II}$ e indiferente $M > M_{II}$.	Positivo $M < M_{II}$ e indiferente $M > M_{II}$.	Si para todo M	No para todo M
			Negativo $M < M_{II}$ e indiferente $M > M_{II}$.	Negativo $M < M_{II}$ e indiferente $M > M_{II}$.	Si para todo M	No para todo M
	$= 0$	> 0	Cero $M < M_{II}$ e indiferente $M > M_{II}$ (mayor pendiente cambio en par cuanto mayor es el cambio de EI)	Constante $M < M_{II}$ e indiferente $M > M_{II}$ (mayor pendiente cambio en par cuanto mayor es el cambio de EI)	No	Si $M > M_{II}$
			Cero $M < M_{II}$ y creciente $M > M_{II}$.	Constante $M < M_{II}$ y creciente $M > M_{II}$.	Si para todo M	Si $M > M_{II}$ mayor en árbol que en carcasa
			Positivo $M < M_{II}$ e indiferente $M > M_{II}$.	Positivo $M < M_{II}$ e indiferente $M > M_{II}$.	Si $M < M_{II}$	No para todo M
			Negativo $M < M_{II}$ e indiferente $M > M_{II}$.	Negativo $M < M_{II}$ e indiferente $M > M_{II}$.	Si para todo M	Si $M > M_{II}$ mayor en árbol que en carcasa
	> 0	< 0	Indiferente (mayor pendiente cambio en par cuanto mayor es el cambio de curvatura)	Indiferente (mayor pendiente cambio en par cuanto mayor es el cambio de EI)	Si $M > M_{II}$	Si $M < M_{II}$
			Creciente $M < M_{II}$ e indiferente $M > M_{II}$.	Creciente $M < M_{II}$ e indiferente $M > M_{II}$ y	Si para todo M	Si $M < M_{II}$ mayor en árbol que en carcasa
			Positivo $M < M_{II}$ e indiferente $M > M_{II}$.	Positivo $M > M_{II}$ e indiferente $M < M_{II}$.	Si $M > M_{II}$	No para todo M
			Negativo $M < M_{II}$ e indiferente $M > M_{II}$.	Negativo $M < M_{II}$ e indiferente $M > M_{II}$.	Si $M > M_{II}$	Si $M < M_{II}$ mayor en árbol que en carcasa

			Indiferente $M < M_{II}$ (mayor pendiente cambio en par cuanto mayor es el cambio de EI) y cero $M > M_{II}$.	Indiferente $M < M_{II}$ (mayor pendiente cambio en par cuanto mayor es el cambio de EI) y constante $M > M_{II}$.	No para todo M	Si $M < M_{II}$
			Creciente $M < M_{II}$ y cero $M > M_{II}$.	Creciente $M < M_{II}$ y constante $M > M_{II}$.	Si para todo M	Si $M < M_{II}$ mayor en árbol que en carcasa
			Indiferente $M < M_{II}$ y positivo $M > M_{II}$.	Indiferente $M < M_{II}$ y positivo $M > M_{II}$.	Si $M > M_{II}$	Si $M < M_{II}$
			Indiferente $M < M_{II}$ y negativo $M > M_{II}$.	Indiferente $M < M_{II}$ y negativo $M > M_{II}$.	Si para todo M	Si $M < M_{II}$ mayor en árbol que en carcasa

El análisis de la *Tabla 3* permite observar que faltarían ciertos factores de influencia, como son la longitud y la sección resistente. Esto se debe a que el material y el cambio de curvatura, que permiten definir la sección resistente, han sido analizados en la etapa anterior de diseño y que la longitud del fleje será calculada a partir del trabajo de la curva par - ángulo girado requerida.

El siguiente paso de diseño es la determinación de las relaciones existentes entre las curvaturas de fabricación y las curvaturas del árbol y carcasa, así como la variación de la rigidez a flexión con la longitud. Dichas variaciones deberán realizarse en función de la curva par – ángulo girado característica del resorte. La selección de los valores de las curvaturas de árbol y carcasa (y por tanto sus radios) deben tener en cuenta adicionalmente los criterios de tamaño y de resistencia. Se debe obtener la curvatura de fabricación del fleje y los valores de las curvaturas de árbol y carcasa en función de la curva de par deseada y de los rangos de la rigidez a flexión utilizables.

Los datos obtenidos permiten abordar el cálculo de la longitud del fleje, para lo cual se calcula el trabajo de la curva característica del resorte. Dicho trabajo será igual a la integral del ángulo girado a lo largo de la longitud, o lo que es lo mismo a la suma de las contribuciones de los cambios de curvatura de cada una de las secciones del fleje. En principio la curva característica obtenida tendrá una forma geométrica base que irá variando de forma homogénea según la longitud del fleje. La longitud deberá ser tal que realice el ajuste con la relación par – ángulo girado especificada.

Definidos los parámetros anteriores es posible realizar la construcción de las curvas características del fleje a diferentes pares, como ha sido planteado en epígrafes anteriores. Una vez definida la longitud del resorte y construida la curva característica, puede darse el caso que en ciertas posiciones a lo largo de la longitud no se ajuste la curva obtenida con la especificada. Si esto ocurre se deberá modificar localmente los valores de la rigidez a flexión para lograr dicho ajuste.

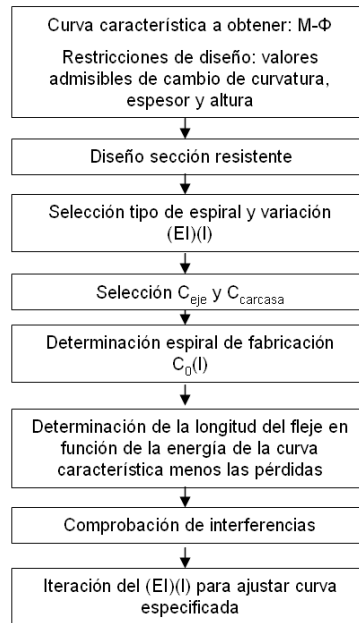


Figura 35. Flujograma del procedimiento de diseño de resortes espirales a torsión.

Las consideraciones anteriores permiten definir el resorte con curva característica y restricciones especificadas, sin embargo basándose en el posterior análisis del ángulo girado por el resorte y su variación con el par es posible definir otro procedimiento de diseño. Ambos procedimientos de diseño son análogos y convergentes. Este procedimiento (Figura 35) va a permitir en epígrafes posteriores realizar el diseño de dos resortes fabricados ambos en materiales compuestos, uno de ellos de alta variabilidad de par con objeto de ocupar el mínimo espacio posible y otro de baja variabilidad en su funcionamiento.

Método analítico de diseño de resortes espirales a torsión.

El análisis y cálculo analítico o aproximado mediante la expresión polinómica de las ecuaciones de comportamiento del resorte se establece en función de los requerimientos y condiciones de operación. Las especificaciones de diseño son la curva par – ángulo girado requerido $\Phi(M)$, la variación de la rigidez a flexión a lo largo de la longitud $E(l)I(l)$, expresado por simplicidad como $EI(l)$, y los radios de la carcasa y árbol R y R_L . Los valores a obtener para la definición del resorte serán la curvatura de fabricación $C_0(l)$, variación con el par del ángulo bloqueado en la carcasa $\beta(M)$, variación con el par del ángulo bloqueado en el árbol $\theta(M)$ y la longitud total del fleje L_0 . Es importante destacar que el ángulo girado por las espiras libres se obtendrá a partir del resto de ángulos girados, ya que todos los parámetros son calculados o especificaciones de diseño.

La expresión polinómica de los parámetros e incógnitas, dependerá de la forma geométrica de sus curvas. De forma genérica se puede suponer que cada uno de ellos depende de un número indeterminado de coeficientes. En la mayoría de los casos con una aproximación mediante ecuación de segundo grado puede ser suficiente. En el caso de no ser así, siempre se puede desdoblar la curva característica en tantos casos concatenados como sea necesario para la correcta definición. Dicha secuenciación de la curva vendrán dadas a partir de los puntos de comienzo o finalización de bloqueo o desbloqueo en árbol y en carcasa o cambios importantes en la curvatura o en la rigidez a flexión del fleje.

Una vez conocidas las especificaciones y restricciones del diseño debe seleccionarse, el tipo de espiral a emplear, esto es, la forma de la variación de la curvatura a lo largo de su longitud, aunque sus valores exactos sean desconocidos en ese momento. Para su selección puede ser empleada la *Tabla 3*.

Téngase en cuenta que es posible definir un procedimiento análogo al mostrado en el que se conozca la variación de la curvatura de fabricación con la longitud en vez de la rigidez a flexión. Así como otro en el que el ángulo dependiente en vez de ser el girado por las espiras libres sea alguno de los bloqueados, ya sea en la carcasa o en el árbol.

Las ecuaciones de partida son las que establecen los ángulos girados por las espiras libres y las bloqueadas en árbol $\theta(M)$ y carcasa $\beta(M)$ y ángulo total girado. Los ángulos girados por las espiras bloqueadas $\theta(M)$ y $\beta(M)$ y libres $\Phi_l(M)$, se pueden expresar también mediante las longitudes de bloqueo, en función de los ángulos y radios, $L_{SB}=L_0-R_L \theta(M)$ y $L_{HA}=R\beta(M)$. Pueden expresarse matemáticamente como aquellos ángulos girados para los que la curvatura alcanzada, para un par genérico M , sea igual, respectivamente, a la curvatura del árbol o de la carcasa. Téngase en cuenta que la curvatura del fleje para un par aplicado, puede expresarse a partir de la curvatura de fabricación más el cociente entre dicho par y rigidez a flexión.

$$C_M(l=R\beta)=C_0(l=R\beta)+\frac{M}{(E \cdot I)(l=R\beta)}=\frac{1}{R} \quad (38)$$

$$C_M(l=L_0-R_L\theta)=C_0(l=L_0-R_L\theta)+\frac{M}{(E \cdot I)(l=L_0-R_L\theta)}=\frac{1}{R_L} \quad (39)$$

$$\Phi_l(M)=\int_{R\beta}^{L_0-R_L\theta} \left(C_0(l)+\frac{M}{(E \cdot I)(l)} \right) \cdot dl \quad (40)$$

Por simplicidad en la escritura, se va a expresar $E(l)I(l)$ como $(EI)(l)$, $E(l=R\beta(M)) I(l=R\beta(M))$ como $(EI)(R\beta)$ o $E(l=L_0-R_L\theta(M)) I(l=L_0-R_L\theta(M))$ como $(EI)(L_0-R_L\theta)$.

Con todo lo mostrado hasta el momento, se dispone de las siguientes ecuaciones:

- Ángulo girado por el resorte en función del par aplicado.

- Ángulo girado por las espiras bloqueadas en la carcasa.
- Ángulo girado por las espiras bloqueadas en el árbol.

Las especificaciones del modelo desarrollado son:

- Curva característica par - ángulo girado a obtener.
- Variación de la rigidez a flexión a lo largo de la longitud del fleje que va a depender de forma simplificada cuadráticamente con la longitud o de forma genérica en orden n . Como se ha indicado también es posible generar un procedimiento de diseño análogo en el que el valor conocido sea la variación de la curvatura y la incógnita la variación de la rigidez a flexión.

$$EI = EI(l^n, \dots, l^2, l, cte) \quad EI = EI(l^2, l, cte) \quad (41)$$

- Radio de la carcasa R y del árbol R_L .

Así como de las siguientes incógnitas,

- Longitud total del fleje L_0 .
- Variación de la curvatura de fabricación del resorte a lo largo de la longitud del fleje que va a depender cuadráticamente con la longitud del fleje o de forma genérica en orden c .

$$C_0 = C_0(l^c, \dots, l^2, l, cte) \quad C_0 = C_0(l^2, l, cte) \quad (42)$$

- Ángulo bloqueado por las espiras en la carcasa que va a depender cuadráticamente con el par aplicado o de forma genérica en orden b .

$$\beta = \beta(M^b, \dots, M^2, M, cte) \quad \beta = \beta(M^2, M, cte) \quad (43)$$

- Ángulo bloqueado por las espiras en el árbol: va depender cuadráticamente con el par aplicado o de forma genérica en orden t .

$$\theta = \theta(M^t, \dots, M^2, M, cte) \quad \theta = \theta(M^2, M, cte) \quad (44)$$

Se dispone de diez parámetros (bajo la hipótesis de expresión mediante polinomios cuadráticos de todas las ecuaciones) desconocidos con solamente nueve ecuaciones a resolver, que dependen del par. Cada una de ellas permite, por identificación de coeficientes en el par, obtener tres ecuaciones (mediante la igualación de coeficientes en el término independiente, lineal y cuadrático en el par). Con ello el sistema de ecuaciones queda indeterminado pendiente de una ecuación adicional.

Es importante destacar que las ecuaciones que describen los diferentes ángulos girados por las espiras del resorte, van a dar ecuaciones de mayor grado que el cuadrático de sus componentes, ya que en dichas

ecuaciones los parámetros linealizados están multiplicados entre sí. Pero, al considerarse en la expresión polinómica que las potencias superiores a dos van a tener coeficientes de bajo valor (órdenes de magnitud muy inferior al resto), al multiplicar dos de ellos, van a ser un coeficiente de orden inferior, por lo que, directamente dichos coeficientes serán valores tendiendo a cero. Por tanto, dichas ecuaciones son directamente triviales y no pueden incorporarse como datos para resolver el sistema. Es por tanto información redundante. Otro de los aspectos a destacar es que alguna o todas de las ecuaciones anteriores puede tener la necesidad, por su complejidad o por necesidad de alta resolución, de ser expresada en un orden polinómico mayor que el resto. En dicho caso ocurre lo mismo que con orden homogéneo, ciertas ecuaciones darán lugar a un sistema indeterminado con una incógnita más que el número de ecuaciones que se dispone, por lo que persistirá la necesidad de una ecuación adicional de cualquier forma.

La ecuación adicional puede obtenerse con alguna de las siguientes optimizaciones: por una parte, imponiendo que no trabajen las espiras no desbloqueadas (optimización de la longitud del fleje) tanto en la carcasa (ángulo bloqueado en la carcasa cero para el par máximo) o en el árbol (ángulo bloqueado en el árbol cero a par cero). Esto significa que para el par máximo no existan espiras bloqueadas en la carcasa, o que el par mínimo no existan espiras bloqueadas en el árbol, que no vayan a formar parte de la longitud útil.

$$\beta(M = Max) = 0 \quad (45)$$

$$\theta(M = Min) = 0 \quad (46)$$

La ecuación adicional también podría ser la resultante del análisis del trabajo de la curva característica. Diferentes criterios ingenieriles pueden emplearse, tales como máxima energía almacenada, análisis de modos de fallo, tamaño o coste. De forma genérica el espesor disminuirá y la altura crecerá con la disminución de la densidad de energía del material. El valor asintótico de mínimo volumen ocupado es calculable con consideraciones energéticas, en la cual E es el módulo de elasticidad del material empleado, σ_{adm} la tensión máxima del material empleado y k un factor que tiene en cuenta la configuración de la sección resistente, tomando valores habitualmente entre 1 y 3, siendo uno en el caso particular de material homogéneo y sección rectangular.

$$\frac{\int M d\Phi}{V} = \frac{k}{6} \frac{\sigma_{adm}^2}{E} \quad (47)$$

En el caso particular de sección resistente rectangular, es posible calcular las dimensiones de la misma (espesor h y la altura b) a partir de los valores de la tensión máxima admisible, módulo elástico y cambio de curvatura.

$$h = \frac{2 \cdot \sigma_{adm}}{E \cdot \Delta\varphi} \quad (48)$$

$$I = \frac{M \cdot h}{2 \cdot \sigma_{adm}}$$

(49)

$$b = \frac{12 \cdot I}{h^3} \quad (50)$$

El sistema de ecuaciones planteado anteriormente tiene solución. Sin embargo la solución analítica puede no ser factible en ciertas circunstancias. Se plantean a continuación ciertas restricciones u optimizaciones del proceso de cálculo que pueden facilitar el diseño final de resorte requerido:

- El radio de la carcasa debe ser siempre mayor que el del árbol.
- El radio del árbol debe tener un valor mínimo diseñado para que soporte el máximo par aplicado.
- El cambio de curvatura no debe exceder ciertos valores máximos para un material y espesor seleccionados.
- El radio de la carcasa debe ser limitado mediante criterios de fabricabilidad, coste y montaje.
- La longitud del fleje debe estar limitados por criterios de fabricabilidad, coste y montaje.

3.2.1.- Obtención analítica de la variación de los ángulos girados y de su pendiente con el par.

La necesidad de conocer la segunda variación de la relación par - ángulo girado ya ha sido mencionada en el procedimiento generalizado de diseño, ya que tiene como fin determinar los coeficientes de variación necesarios para la modulación de la curva característica. Para dicho análisis, así como el de la derivada primera del ángulo girado, se parte de la ecuación general de definición del ángulo total girado con el par, sobre la que se aplica la aditividad de la función derivada.

$$\begin{aligned} \Phi(M) &= \Phi_l(M) + \beta(M) + \theta(M) \\ \frac{\partial}{\partial M} \Phi(M) &= \frac{\partial}{\partial M} \Phi_l(M) + \frac{\partial}{\partial M} \beta(M) + \frac{\partial}{\partial M} \theta(M) \\ \frac{\partial^2}{\partial M^2} \Phi(M) &= \frac{\partial^2}{\partial M^2} \Phi_l(M) + \frac{\partial^2}{\partial M^2} \beta(M) + \frac{\partial^2}{\partial M^2} \theta(M) \end{aligned}$$

Por tanto el problema, se trasforma en el cálculo de las derivadas de los ángulos girados por las espiras libres $\Phi_l(M)$, bloqueado en árbol $\theta(M)$ y en carcasa $\beta(M)$. Los valores de partida del ángulo girado por las espiras libres se obtienen a partir de la suma de las contribuciones de la curvatura en función del par aplicado entre los límites de espiras libres, marcados por los ángulos bloqueados en árbol y carcasa. Por otra parte los ángulos de bloqueo se obtienen a partir de las ecuaciones en las que se cumple la condición de que la

curvatura en función del par es igual a la curvatura del árbol o de la carcasa. Para mejor operatividad, en los siguientes análisis se definen las funciones auxiliares $f_1(\beta(M), M)$ y $f_2(\theta(M), M)$, obtenidas a partir de igualar a cero las expresiones de los ángulos bloqueados.

$$\Phi_l(M) = \int_{R \cdot \beta}^{L_0 - R_L \cdot \theta} C(l) \cdot dl = \int_{R \cdot \beta}^{L_0 - R_L \cdot \theta} \left(C_0(l) + \frac{M}{(E \cdot I)(l)} \right) \cdot dl = \int_{\varphi_\beta}^{\varphi_\theta} \left(C_0(l) + \frac{M}{(E \cdot I)(l)} \right) \cdot \frac{\partial l}{\partial \varphi} \cdot d\varphi \quad (51)$$

$$C_M(R \cdot \beta) = C_0(R \cdot \beta) + \frac{M}{(E \cdot I)(R \cdot \beta)} = \frac{1}{R} \quad f_1(\beta, M) = C_0(R \cdot \beta) + \frac{M}{(E \cdot I)(R \cdot \beta)} - \frac{1}{R} = 0 \quad (52)$$

$$C_M(L_0 - R_L \cdot \theta) = C_0(L_0 - R_L \cdot \theta) + \frac{M}{(E \cdot I)(L_0 - R_L \cdot \theta)} = \frac{1}{R_L} \quad f_2(\theta, M) = C_0(L_0 - R_L \cdot \theta) + \frac{M}{(E \cdot I)(L_0 - R_L \cdot \theta)} - \frac{1}{R_L} = 0 \quad (53)$$

Se comienza con el cálculo de la variación del ángulo β , a partir de la ecuación 41.

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_1(\beta, M)}{\partial M} &= \frac{\partial C_0(R \cdot \beta)}{\partial M} + \frac{\partial (M/(E \cdot I)(R \cdot \beta))}{\partial M} - \frac{\partial}{\partial M} \left(\frac{1}{R} \right) = 0 \\ \frac{\partial C_0(R \cdot \beta)}{\partial (R \cdot \beta)} \cdot R \cdot \frac{\partial \beta}{\partial M} &+ \frac{(E \cdot I)(R \cdot \beta) - M \cdot \frac{\partial (E \cdot I)(R \cdot \beta)}{\partial (R \cdot \beta)} \cdot R \cdot \frac{\partial \beta}{\partial M}}{(E \cdot I)^2(R \cdot \beta)} = 0 \\ \frac{\partial \beta}{\partial M} &= \frac{1}{(E \cdot I)(R \cdot \beta)} \cdot \frac{1}{\frac{M \cdot R}{(E \cdot I)^2(R \cdot \beta)} \cdot \frac{\partial (E \cdot I)(R \cdot \beta)}{\partial (R \cdot \beta)} - \frac{\partial C_0(R \cdot \beta)}{\partial (R \cdot \beta)} \cdot R} \end{aligned} \quad (54)$$

$$\frac{\partial^2 f_1(\beta, M)}{\partial M^2} = \frac{\partial}{\partial M} \left[\frac{\partial C_0(R \cdot \beta)}{\partial M} \cdot R \cdot \frac{\partial \beta}{\partial M} \right] + \frac{\partial}{\partial M} \frac{1}{(E \cdot I)(R \cdot \beta)} - \frac{\partial}{\partial M} \left[\frac{M \cdot \frac{\partial (E \cdot I)(R \cdot \beta)}{\partial M} \cdot R \cdot \frac{\partial \beta}{\partial M}}{(E \cdot I)^2(R \cdot \beta)} \right] = 0$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \beta}{\partial M^2} &= \frac{(\partial \beta / \partial M)^2}{R \cdot \frac{\partial C_0}{\partial (R \cdot \beta)} - \frac{RM}{(EI)^2(R \cdot \beta)} \cdot \frac{\partial (EI)(R \cdot \beta)}{\partial (R \cdot \beta)}} \left[MR^2 \frac{\partial^2 (EI)(R \cdot \beta)}{\partial (R \cdot \beta)^2} \frac{1}{(EI)^2(R \cdot \beta)} - R^2 \frac{\partial^2 C_0}{\partial (R \cdot \beta)^2} - 2R^2 M \left(\frac{\partial (EI)}{\partial (R \cdot \beta)} \right)^2 \frac{1}{(EI)^3(R \cdot \beta)} \right] \\ &+ \frac{(\partial \beta / \partial M)}{R \cdot \frac{\partial C_0}{\partial (R \cdot \beta)} - \frac{RM}{(EI)^2(R \cdot \beta)} \cdot \frac{\partial (EI)(R \cdot \beta)}{\partial (R \cdot \beta)}} \left[\frac{\partial (EI)}{\partial (R \cdot \beta)} \frac{R}{(EI)^2(R \cdot \beta)} + R \frac{\partial (EI)}{\partial (R \cdot \beta)} \frac{1}{(EI)^2(R \cdot \beta)} \right] \end{aligned} \quad (55)$$

Se continúa con el cálculo de la variación del ángulo θ .

$$\frac{\partial f_2(L_0 - R_L \cdot \theta, M)}{\partial M} = \frac{\partial C_0(L_0 - R_L \cdot \theta)}{\partial M} + \frac{\partial (M/(E \cdot I)(L_0 - R_L \cdot \theta))}{\partial M} - \frac{\partial}{\partial M} \left(\frac{1}{R_L} \right) = 0$$

$$-\frac{\partial C_0(L_0 - R_L \cdot \theta)}{\partial(L_0 - R_L \cdot \theta)} \cdot R_L \cdot \frac{\partial \theta}{\partial M} + \frac{(E \cdot I)(L_0 - R_L \cdot \theta) + M \cdot \frac{\partial(E \cdot I)(L_0 - R_L \cdot \theta)}{\partial(L_0 - R_L \cdot \theta)} \cdot R_L \cdot \frac{\partial \theta}{\partial M}}{(E \cdot I)^2(L_0 - R_L \cdot \theta)} = 0$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial M} = \frac{1}{(E \cdot I)(L_0 - R_L \cdot \theta)} \cdot \frac{1}{-\frac{M \cdot R_L}{(E \cdot I)^2(L_0 - R_L \cdot \theta)} \cdot \frac{\partial(E \cdot I)(L_0 - R_L \cdot \theta)}{\partial(L_0 - R_L \cdot \theta)} + \frac{\partial C_0(L_0 - R_L \cdot \theta)}{\partial(L_0 - R_L \cdot \theta)} \cdot R_L} \quad (56)$$

$$\frac{\partial^2 f_2(L_0 - R_L \cdot \theta, M)}{\partial M^2} = -\frac{\partial}{\partial M} \left[\frac{\partial C_0(L_0 - R_L \cdot \theta)}{\partial} \cdot R_L \cdot \frac{\partial \theta}{\partial M} \right] + \frac{\partial}{\partial M} \frac{1}{(E \cdot I)(L_0 - R_L \cdot \theta)} + \frac{\partial}{\partial M} \left[\frac{M \cdot \frac{\partial(E \cdot I)(L_0 - R_L \cdot \theta)}{\partial(L_0 - R_L \cdot \theta)} \cdot R_L \cdot \frac{\partial \theta}{\partial M}}{(E \cdot I)^2(L_0 - R_L \cdot \theta)} \right] = 0$$

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial M^2} = \frac{(\partial \theta / \partial M)^2}{\frac{MR_L}{(EI)^2(L_0 - R_L \theta)} \cdot \frac{\partial(EI)(L_0 - R_L \theta)}{\partial(L_0 - R_L \theta)} - R_L \frac{\partial C_0(L_0 - R_L \theta)}{\partial(L_0 - R_L \theta)}} \left[\frac{-R_L \frac{\partial^2 C_0(L_0 - R_L \theta)}{\partial^2(L_0 - R_L \theta)} + \frac{MR_L}{(EI)^2(L_0 - R_L \theta)} \frac{\partial^2(EI)(L_0 - R_L \theta)}{\partial^2(L_0 - R_L \theta)} - 2 \frac{MR_L^2}{(EI)^3(L_0 - R_L \theta)} \left(\frac{\partial(EI)(L_0 - R_L \theta)}{\partial(L_0 - R_L \theta)} \right)^2 \right] - \frac{(\partial \theta / \partial M)}{\frac{MR_L}{(EI)^2(L_0 - R_L \theta)} \cdot \frac{\partial(EI)(L_0 - R_L \theta)}{\partial(L_0 - R_L \theta)} - R_L \frac{\partial C_0(L_0 - R_L \theta)}{\partial(L_0 - R_L \theta)}} \frac{2R_L}{(EI)^2(L_0 - R_L \theta)} \frac{\partial(EI)(L_0 - R_L \theta)}{\partial(L_0 - R_L \theta)} \quad (57)$$

Se calcula la variación del ángulo girado por las espiras libres Φ_l , para la cual es necesario aplicar la regla integral de Leibniz.

$$\frac{d}{d\alpha} \int_{a(\alpha)}^{b(\alpha)} f(x, \alpha) dx = \frac{db(\alpha)}{d\alpha} f(b(\alpha), \alpha) - \frac{da(\alpha)}{d\alpha} f(a(\alpha), \alpha) + \int_{a(\alpha)}^{b(\alpha)} \frac{\partial}{\partial \alpha} f(x, \alpha) dx \quad (58)$$

$$\frac{\partial}{\partial M} \Phi_l(M) = \frac{\partial}{\partial M} \int_{R \cdot \beta(M)}^{L_0 - R_L \cdot \theta(M)} \left(C_0(l) + \frac{M}{(E \cdot I)(l)} \right) \cdot dl =$$

$$= -R_L \cdot \frac{\partial \theta}{\partial M} \cdot \left(C_0(L_0 - R_L \cdot \theta) + \frac{M}{(E \cdot I)(L_0 - R_L \cdot \theta)} \right) - R \cdot \frac{\partial \beta}{\partial M} \cdot \left(C_0(R \cdot \beta) + \frac{M}{(E \cdot I)(R \cdot \beta)} \right) + \int_{R \cdot \beta}^{L_0 - R_L \cdot \theta} \frac{dl}{(E \cdot I)(l)}$$

Para obtener la derivada segunda se divide la integral en tres sumandos

$$\frac{\partial^2}{\partial M^2} \Phi_l(M) = \frac{\partial^2}{\partial M^2} \int_{R \cdot \beta}^{L_0 - R_L \cdot \theta} \left(C_0(l) + \frac{M}{(E \cdot I)(l)} \right) \cdot dl = I_1 + I_2 + I_3 \quad (60)$$

$$\begin{aligned}
 I_1 &= -R_L \cdot \left[\frac{\partial^2 \theta}{\partial M^2} \cdot \left(C_0(L_0 - R_L \cdot \theta) + \frac{M}{(E \cdot I)(L_0 - R_L \cdot \theta)} \right) + \frac{\partial \theta}{\partial M} \cdot \left(\frac{\partial C_0(L_0 - R_L \cdot \theta)}{\partial (L_0 - R_L \cdot \theta)} \cdot \left(-R_L \cdot \frac{\partial \theta}{\partial M} \right) + \frac{(E \cdot I)(L_0 - R_L \cdot \theta) - M \frac{\partial (E \cdot I)(L_0 - R_L \cdot \theta)}{\partial (L_0 - R_L \cdot \theta)}}{(E \cdot I)^2 (L_0 - R_L \cdot \theta(M))} \cdot \left(-R_L \cdot \frac{\partial \theta}{\partial M} \right) \right] \right] \\
 I_2 &= -R \cdot \left[\frac{\partial^2 \beta}{\partial M^2} \cdot \left(C_0(R \cdot \beta) + \frac{M}{(E \cdot I)(R \cdot \beta)} \right) + \frac{\partial \beta}{\partial M} \cdot \left(\frac{\partial C_0(R \cdot \beta)}{\partial (R \cdot \beta)} \cdot R \cdot \frac{\partial \beta}{\partial M} + \frac{(E \cdot I)(R \cdot \beta) - M \frac{\partial (E \cdot I)^2 (R \cdot \beta)}{\partial (R \cdot \beta)} \cdot R \cdot \frac{\partial \beta}{\partial M}}{(E \cdot I)^2 (R \cdot \beta)} \right) \right] \\
 I_3 &= \frac{\partial}{\partial M} \int_{R \cdot \beta}^{L_0 - R_L \cdot \theta} \frac{dl}{(E \cdot I)(l)} = -\frac{R_L}{(E \cdot I)(L_0 - R_L \cdot \theta)} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial M} - \frac{R}{(E \cdot I)(R \cdot \beta)} \cdot \frac{\partial \beta}{\partial M}
 \end{aligned}$$

Como se observa de las expresiones anteriores, el trabajo directo con ellas es bastante farragoso. De ahí que se requiera la aplicación a los casos concretos de diseño a estudio, curva generatriz espiral clotoidal con variación de inercia inversamente proporcional a la longitud y espiral de Arquímedes bloqueada en el árbol a máximo par.

Consideraciones particulares par resorte con sección resistiva y módulo resistente constantes.

Las ecuaciones anteriormente planteadas se simplifican de la siguiente forma cuando la sección y rigidez a flexión es constante a lo largo de la longitud.

$$\frac{\partial \beta}{\partial M} = \frac{-1}{EI} \cdot \frac{1}{R} \cdot \frac{1}{\partial C_0(R\beta)/\partial (R\beta)} \quad (61)$$

$$\frac{\partial^2 \beta}{\partial M^2} = \frac{1}{(EI)^2} \cdot \frac{1}{R} \cdot \frac{1}{(\partial C_0(R\beta)/\partial (R\beta))^3} \cdot \frac{\partial^2 C_0(R\beta)}{\partial^2 (R\beta)} \quad (62)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial M} = \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{R_L} \cdot \frac{1}{\partial C_0(L_0 - R_L \theta)/\partial (L_0 - R_L \theta)} \quad (63)$$

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial M^2} = \frac{1}{(EI)^2} \cdot \frac{1}{R_L} \cdot \frac{1}{(\partial C_0((L_0 - R_L \theta))/\partial ((L_0 - R_L \theta)))^3} \cdot \frac{\partial^2 C_0(L_0 - R_L \theta)}{\partial (L_0 - R_L \theta)^2} \quad (64)$$

$$\frac{\partial \phi_L}{\partial M} = \frac{-1}{EI} \cdot \frac{C_0(R\beta) + M/EI}{\partial C_0(R\beta)/\partial (R\beta)} + \frac{1}{EI} \cdot \frac{C_0(L_0 - R_L \theta) + M/EI}{\partial C_0(L_0 - R_L \theta)/\partial (L_0 - R_L \theta)} + (L_0 - R_L \theta - R\beta) \quad (65)$$

$$\frac{\partial^2 \phi_L}{\partial M^2} = -R \cdot \frac{\partial^2 \beta}{\partial M^2} \cdot \left(C_0(R\beta) + \frac{M}{EI} \right) - R_L \cdot \frac{\partial^2 \theta}{\partial M^2} \cdot \left(C_0(L_0 - R_L \theta) + \frac{M}{EI} \right) + \frac{(L_0 - R_L \theta - R\beta)}{EI} \quad (66)$$

3.2.2.- Consideraciones de la influencia del espesor de la espira sobre la curva característica.

El análisis planteado hasta el momento no ha tenido en cuenta el espesor del fleje en la curva característica par - ángulo girado (así como las curvas en las que se puede desglosar) y sobre el espacio útil mínimo requerido. En aquellos diseños en los que el espesor es significativo o la longitud del fleje es elevada, el espesor del fleje es un aspecto importante a tener en cuenta. La tensión máxima admisible del material de fabricación del fleje y las condiciones de carga van a limitar la sección resistente del mismo. En dichos casos particulares, la importancia de la elección del espesor es primordial para un correcto funcionamiento.

La influencia de manera genérica del espesor del fleje sobre su comportamiento se concretiza en los siguientes aspectos:

- Disminución del ángulo girado máximo por el resorte, debido al aumento del radio del árbol y disminución del radio de la carcasa, por bloqueo de espiras. Si el espesor no ha sido tenido en cuenta, el espacio comprendido entre árbol y carcasa debería ser mayorado. El árbol tendrá, por tanto, un radio mayor, con el fleje bloqueado de igual forma que el radio de la carcasa será menor.
- Disminución del par de funcionamiento debido a la disminución del par de bloqueo.
- Curva característica del resorte modificada, curvaturas de bloqueo en árbol y en carcasa diferentes a las diseñadas que van variando con el giro del resorte por el enrollamiento y desenrollamiento del fleje sobre árbol y carcasa. Los límites de bloqueo verticales (correspondiente a las curvaturas de árbol y carcasa fijas) se curvan por la variación en el bloqueo - desbloqueo haciendo que las curvaturas se vean afectadas.

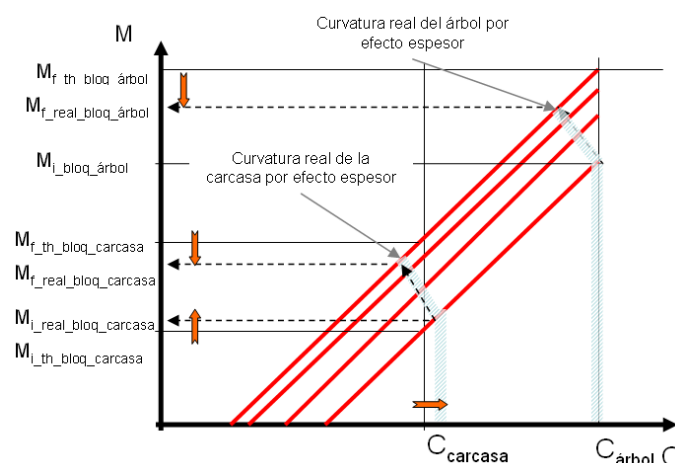


Figura 36. Variación de la curva par-curvatura por efecto del espesor del fleje.

Estas consideraciones van a ser analizadas en un caso de diseño genérico como es aquel en el que la curvatura inicial de todas y cada una de las secciones del fleje se encuentran por debajo de las curvaturas tanto del árbol como de la carcasa. Para lo cual se va a emplear el diagrama par - curvatura ya utilizado para analizar la influencia de los parámetros de diseño del resorte sobre su curva característica (*Figura 68 y Figura 77*).

En el momento que se produce bloqueo o desbloqueo de espiras tanto en árbol como en carcasa los radios considerados van a modificarse (*Figura 36*). Los valores de curvaturas de carcasa y de árbol teóricamente constantes van a variar, teniéndose que considerar los valores reales de los mismos. Se va a modificar también el par de bloqueo, ya que las espiras bloqueadas se encontrarán cada vez un árbol de mayor diámetro y por tanto cada vez menor curvatura. Esto va a generar que el par final, para el cual el fleje se encuentra completamente bloqueado en el árbol, sea menor que el esperado. Para la carcasa, la influencia del espesor empieza desde el par inicial, ya que al estar el fleje bloqueado en la carcasa su diámetro va a ser menor y por tanto su curvatura mayor. La primera consecuencia de este aumento de la curvatura inicial va a ser que el par de bloqueo de la última espira con la carcasa va a ser mayor, por lo que el par de montaje requerido también lo será. Otra consecuencia es la variación del par para la sección inicial, que según las condiciones concretas de diseño requerirá un par mayor o menor al teórico para su desbloqueo en la carcasa.

Además del desarrollo de un modelo que contemple el espesor del fleje existe la posibilidad, como se analizará posteriormente, de considerar unos radios de árbol y carcasa ficticios que tengan en cuenta la variación de los mismos con el espesor y emplear el modelo sin espesor. Sin embargo este modelo debe ser considerado como una aproximación.

Consideración aproximada con radio de árbol y carcasa modificados.

Es posible realizar una aproximación a la influencia del espesor sobre la curva característica del resorte aumentando el radio nominal del árbol y disminuyendo el radio nominal de la carcasa. El aumento del radio del árbol será nulo en el montaje, al estar todas las espiras bloqueadas en la carcasa, y máximo cuando todo el fleje se encuentre bloqueado en el árbol a par máximo, con valor el número de vueltas por el semiespesor árbol (o por un valor de espesor medio del fleje si el de espesor variable) de cada espira. De igual manera para la carcasa, el incremento será las vueltas del fleje sobre la misma por el semiespesor del fleje a par cero, mientras que para par máximo se mantendría el valor de radio nominal, al encontrarse todo el fleje bloqueado en el. De ahí que el valor medio del incremento del radio del árbol y del decremento de la carcasa sea el número de vueltas por la mitad del espesor del fleje.

Para corroborar lo planteado se presenta el análisis en un resorte (*Figura 37*) con espiral clotoidal con parámetro independiente $0,65 \text{ m}^{-1}$ y lineal con la longitud de $1,2 \text{ m}^{-1}$, para un par nominal de 4.250 Nm y máximo de 4.500 Nm . Las secciones resistentes de árbol y carcasa tienen una rigidez de $1.404,40 \text{ Nm}^2$ y $1.755,50 \text{ Nm}^2$ con un espesor de $6,5 \text{ mm}$. Los valores nominales de los radios de árbol y carcasa son $0,217 \text{ m}$ y $0,286 \text{ m}$, siendo las vueltas que el fleje bloqueado da en carcasa 6 y en árbol 7, se dispongan de unos diámetros equivalentes de valores $0,27 \text{ m}$ para la carcasa y $0,24 \text{ m}$ para el árbol. Se observa que ambos modelos comparten el par nominal y ángulo girado, así como su comportamiento en el rango de baja variabilidad del par. Sin embargo, existe un error creciente al irse acercando a los extremos de la zona de baja variabilidad del par con valor máximo el 7%.

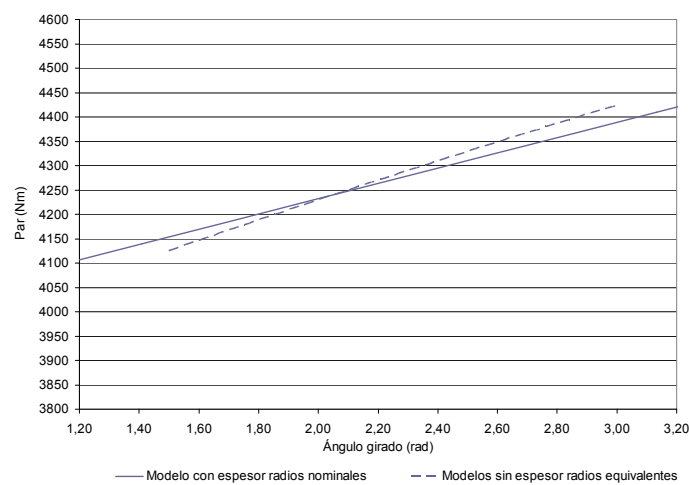


Figura 37. Comparación curva característica con modelo con espesor y sin espesor y radios equivalentes.

Cuantificación de los efectos del espesor y su influencia en la curva característica.

Cuando el espesor del fleje tiene una influencia considerable en el comportamiento del resorte la relación entre el espacio comprendido entre el árbol y la carcasa y el radio del fleje sea baja, y las curvaturas del fleje de fabricación sean mayores que la del árbol y/o menores que la de la carcasa. En el caso de existir bloqueo en la carcasa a par cero, las espiras correspondientes a longitudes cercanas a L_0 quedarán bloqueadas a curvaturas mayores que la de la carcasa, debido al espesor de la longitud bloqueada. Del mismo modo, en el caso de existir bloqueo en el árbol, las espiras correspondientes a longitudes cercanas al origen quedarán bloqueadas a curvaturas menores que la del árbol debido al efecto del espesor de la longitud bloqueada en el árbol. En consecuencia, el cambio de curvatura efectivo de cada una de las secciones que ha sufrido bloqueo será menor que el pronosticado por el modelo si no se tiene en cuenta el espesor.

Para cuantificar este efecto, es necesario estimar el espesor de la longitud bloqueada. Realizando la suposición de que el fleje tiene espesor constante a lo largo de su longitud, el tramo de fleje que está bloqueado configurará una espiral de Arquímedes, cuya expresión en función del ángulo girado, será

$$\alpha_{1L} = \frac{2 \cdot \pi \cdot R_L}{h} \quad (67)$$

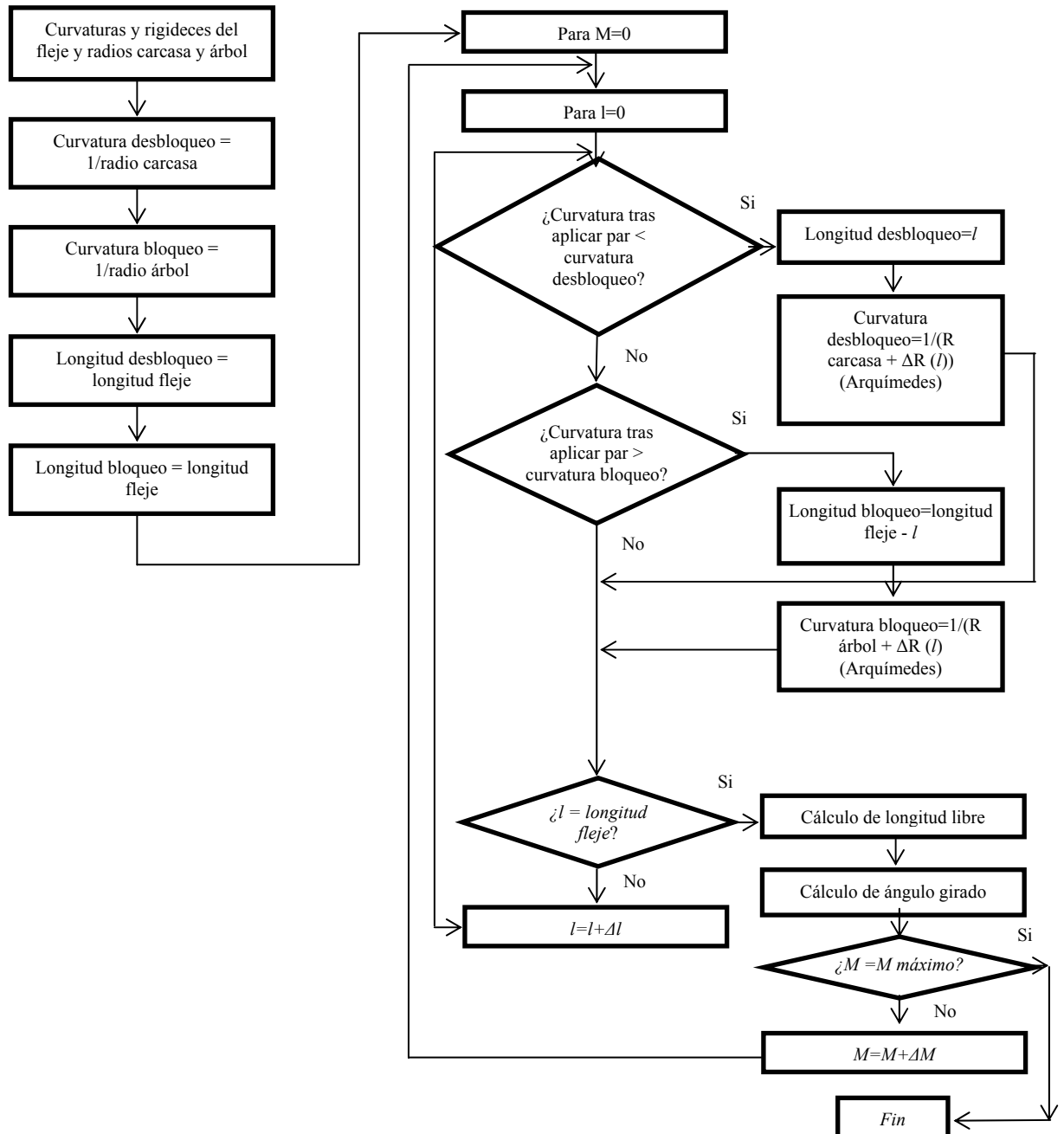


Figura 38. Diagrama de cálculo numérico de la curva característica con los efectos del espesor del fleje.

Integrando a lo largo del ángulo, es posible obtener la relación entre el ángulo de la espiral y la longitud de ésta:

$$l = \frac{h}{4 \cdot \pi} \cdot (\alpha_2^2 - \alpha_1^2) \quad (68)$$

Los ángulos iniciales y finales de las espirales de Arquímedes que forman las longitudes eventualmente bloqueadas en carcasa y árbol son,

$$\alpha_2 = \frac{2 \cdot \pi \cdot R}{h} \quad \alpha_{1L} = \frac{2 \cdot \pi \cdot R_L}{h} \quad (69-70)$$

$$\alpha_1 = \sqrt{\alpha_2^2 - \frac{4 \cdot \pi \cdot l}{h}} \quad \alpha_{1L} = \sqrt{\alpha_{1L}^2 + \frac{4 \cdot \pi \cdot l}{h}} \quad (71-72)$$

Y, por tanto, los radios de desbloqueo y bloqueo serán, respectivamente:

$$R' = \frac{h}{2 \cdot \pi} \alpha_1 \quad R'_L = \frac{h}{2 \cdot \pi} \alpha_{2L} \quad (73-74)$$

El efecto del espesor se puede incluir en el modelo desarrollado simplemente sustituyendo los radios del árbol y de la carcasa R y R_L por las calculadas. El procedimiento numérico para la resolución es el representado en la *Figura 38*.

Procedimiento analítico de diseño con influencia del espesor.

En los apartados anteriores se ha planteado el sistema de ecuaciones básico para abordar el diseño de resortes espirales a torsión ya sea de forma numéricamente o por linealización de las incógnitas. Dichas ecuaciones, son la condición límite de bloqueo / desbloqueo de espiras en carcasa y en el árbol y curva par - ángulo girado según especificación de diseño, más la ecuación adicional que define la longitud, ya sea mediante la optimización de los ángulos bloqueados en par máximo o par mínimo o análisis del trabajo de la curva par – ángulo girado especificado. Para la formulación de dichas ecuaciones no se ha tenido en cuenta que las curvaturas del árbol y de la carcasa son inversamente a los radios modificados, y dependientes de la longitud.

En esta formulación si que se van a tener en cuenta dichos factores, ya que el análisis del espesor ha permitido denotar su alta influencia para ciertos casos de diseño. En esta nueva formulación los radios y curvaturas van a depender de las longitudes bloqueadas tanto en el árbol como en la carcasa l_{BL} y l_B respectivamente (por simplicidad en la denominación no se representa la variación con el par de dichas longitudes ya que $l_{BL}(M)=l_{BL}$ y $l_B(M)=l_B$). La resolución numérica de las ecuaciones implica la definición de dichos valores como incógnitas.

La longitud bloqueada en la carcasa se definirá a partir de la condición de que para dicha longitud se produce el cambio de curvatura entre la carcasa (para la cual su curvatura tiene en cuenta tanto el espesor del fleje como el bloqueo en esta) y el resorte montado.

$$\frac{1}{\frac{h}{2\pi} \sqrt{\left(\frac{2\pi R}{h}\right)^2 - \frac{4\pi d_B}{h}}} = C_0(l_B) + \frac{M}{(EI)(l_B)} \quad (75)$$

La longitud bloqueada en el árbol se definirá a partir de la condición de que para dicha longitud referenciada al origen de longitudes (L_0-l_B) se produce el cambio de curvatura entre el árbol (para el que su curvatura tiene en cuenta tanto el espesor del fleje como el bloqueo en este) y el resorte montado.

$$\frac{1}{\frac{h}{2\pi} \sqrt{\frac{4\pi d_{BL}}{h} - \left(\frac{2\pi R_L}{h}\right)^2}} = C_0(L_0-l_{BL}) + \frac{M}{(EI)(L-l_{BL})} \quad (76)$$

La tercera ecuación será la curva par - ángulo girado requerida, que es la suma de las contribuciones del giro de las espiras bloqueadas en el árbol, en la carcasa y las espiras libres.

$$\left(\frac{2\pi R}{h}\right) - \sqrt{\left(\frac{2\pi R}{h}\right)^2 - \frac{4\pi d_B}{h}} + \sqrt{\frac{4\pi d_{BL}}{h} + \left(\frac{2\pi R_L}{h}\right)^2} - \frac{2\pi R_L}{h} + \int_{l_B}^{L_0-l_{BL}} \left(C_0(l) + \frac{M}{(EI)(l)}\right) dl = \Phi_{objetivo} \quad (77)$$

El análisis de las ecuaciones planteadas, hace que la aplicación de una expresión polinómica de incógnitas con igualación de coeficientes sea inviable. De ahí que la resolución deba ser abordado mediante un método numérico.

3.2.3.- Análisis de otros parámetros de diseño.

Una vez analizada la influencia del espesor del fleje sobre la curva característica del resorte se estudian los radios de la carcasa y del árbol. Adicionalmente se analizan otros parámetros cuya influencia no es directa sobre la curva característica pero tienen importancia como parámetros de diseño y desarrollo de los resortes espirales a torsión.

Influencia del radio de la carcasa sobre la curva característica.

- Consideraciones sobre la variación del ángulo total girado con el radio de la carcasa. El aumento del radio de la carcasa, a igualdad del resto de parámetros y considerando espesor constante, genera un aumento del espacio libre entre árbol y carcasa. Para un determinado valor del par aplicado se observa un aumento del ángulo girado y una disminución de la pendiente de la curva. Mientras, en la

última zona de bloqueo completo del fleje en el árbol la variación del radio de la carcasa no tiene influencia en el comportamiento. Un aumento del radio de la carcasa de 0,020 m genera un aumento del ángulo total girado de un radián. La importancia de este valor debe ser considerado a efectos de tolerancias de fabricación y posibles variaciones de la misma.

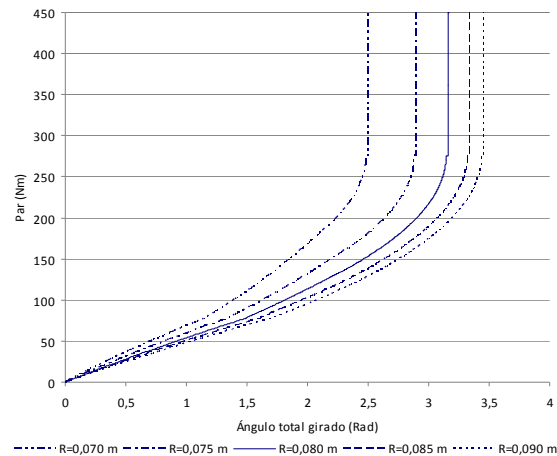


Figura 39. Influencia del radio de la carcasa sobre curva característica.

- Consideraciones sobre la variación del ángulo girado por las espiras bloqueadas en la carcasa con el radio de la curva. El aumento del radio de la carcasa genera que el ángulo girado por las espiras bloqueadas en la misma disminuya, así como el par de desbloqueo completo de la carcasa (Figura 40). Dicho comportamiento es prácticamente paralelo para cada radio de carcasa del rango analizado. Si el radio de la carcasa aumentase no existiría ninguna espira bloqueada, con lo que el ángulo bloqueado sería cero. La disminución del radio de la carcasa produce un aumento tanto del par de desbloqueo como el ángulo total bloqueado por esta.

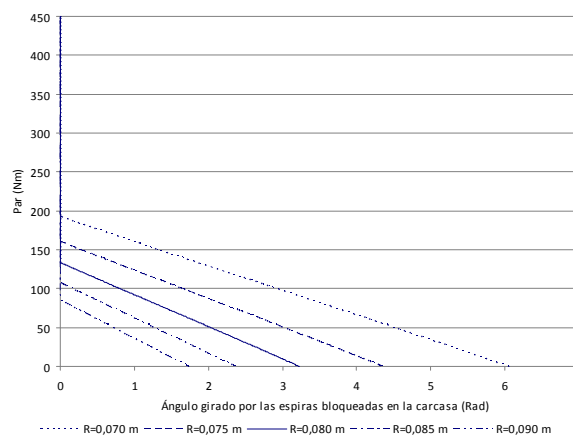


Figura 40. Influencia del radio de la carcasa sobre ángulo girado por las espiras bloqueadas en la carcasa.

- Consideraciones sobre la variación del ángulo girado por las espiras bloqueadas en el árbol con el radio de la carcasa. No existe influencia del radio de la carcasa sobre el ángulo girado por las espiras bloqueadas en el árbol.

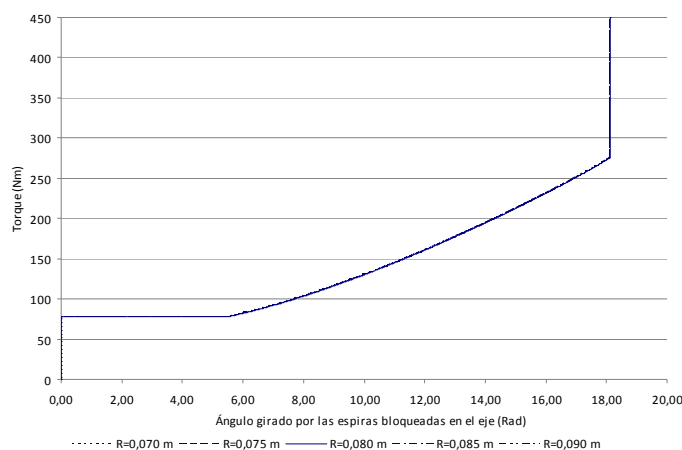


Figura 41. Influencia del radio de la carcasa sobre ángulo girado por las espiras bloqueadas en el árbol.

Se observan tres zonas diferentes en su curva característica. En la primera de el ángulo girado es constante (desbloqueo de espiras en la carcasa sin bloqueo en el árbol). En la segunda zona existe un proceso de bloqueo continuo en el árbol (aumento del ángulo girado por las espiras bloqueadas en el árbol generado por un proceso de desbloqueo en la carcasa y bloqueo en el árbol). La última zona se caracteriza por el bloqueo completo de toda la longitud útil en el árbol, por lo que el aumento de par no genera incremento del ángulo girado (*Figura 41*).

- Consideraciones sobre la variación del ángulo girado por las espiras libres con el radio de la carcasa. La influencia del radio de la carcasa sobre el giro de las espiras libres se puede obtener directamente del análisis conjunto del resto de los ángulos girados estudiados con anterioridad. Se observa la existencia de diferentes zonas de comportamiento según el comienzo o finalización de los bloqueos en árbol y carcasa. La primera zona, caracterizada por un desbloqueo en el árbol sin bloqueo en la carcasa, tiene comportamiento lineal creciente con el radio pero paralelo unos a otros, debido a que la longitud bloqueada en la carcasa disminuye con el aumento del radio de esta. La segunda zona tiene comportamiento no lineal de variación diferente con aumento del ángulo girado con la disminución del radio de la carcasa, debido a la aparición de bloqueo en el árbol sin finalización del bloqueo en la carcasa. La última zona tiene un comportamiento lineal hasta el par de 270 Nm, comenzando a diferentes pares según el radio de la carcasa, en la que no existe longitud a

desbloquear en la carcasa, pero se produce giro de las espiras libres con bloqueo en el árbol. A partir de dicha zona no existe giro de las espiras libres ya que todo el resorte se encuentra bloqueado.

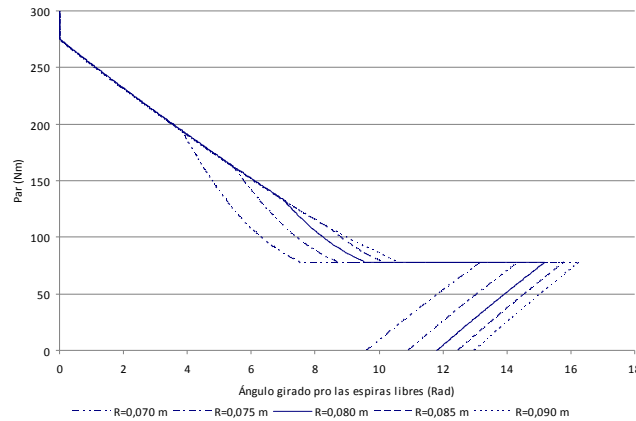


Figura 42. Influencia del radio de la carcasa sobre ángulo girado por las espiras libres.

Influencia del radio del árbol sobre la curva característica.

- Consideraciones sobre la variación del ángulo total girado con el radio del árbol. El aumento del radio del árbol produce una disminución del ángulo total girado por el resorte, aumento de la pendiente en la zona de comportamiento lineal y aumento de la zona de comportamiento vertical. Estos factores implican la disminución del rango útil de empleo del resorte. Al multiplicar por dos el radio de la carcasa se reduce a la mitad el ángulo girado por el resorte, para la primera zona de comportamiento lineal. Todo ello es debido a que se dispone de menor espacio útil entre árbol y carcasa. Se anticipa el bloqueo de espiras, debido a la menor la curvatura, al aumentar el radio, y por tanto genera mayor longitud bloqueada.

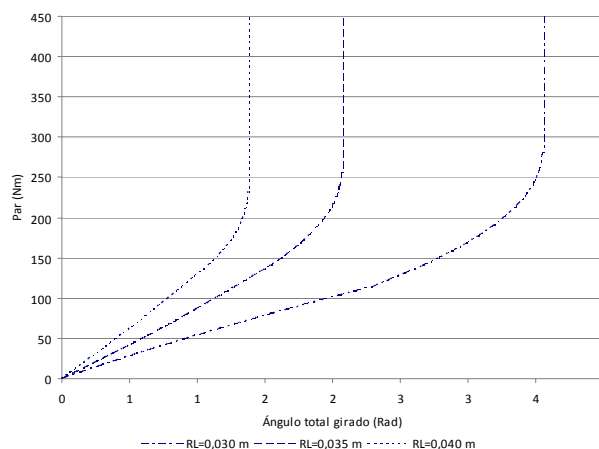


Figura 43. Influencia del radio del árbol sobre curva característica.

- Consideraciones sobre la variación del ángulo girado por las espiras bloqueadas en la carcasa con el radio del árbol. No existe influencia del radio del árbol sobre el giro de las espiras bloqueadas en la carcasa. Para el rango de radios de la carcasa, se produce el desbloqueo progresivo de espiras en el árbol, por lo que se tiene una curva decreciente hasta el par de desbloqueo del fleje sobre la carcasa, en este caso de valor 135 Nm. Así el ángulo inicial bloqueado en la carcasa es de aproximadamente 3,2 rad y va disminuyendo linealmente.

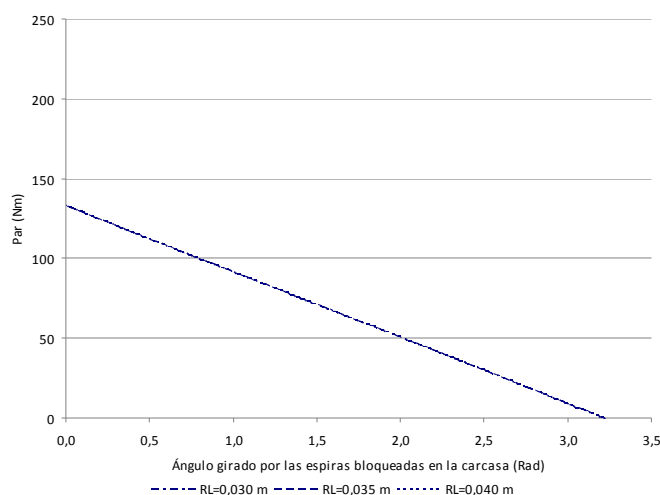


Figura 44. Influencia del radio del árbol sobre ángulo girado por las espiras bloqueadas en la carcasa.

- Consideraciones sobre la variación del ángulo girado por las espiras libres con el radio del árbol. La influencia del ángulo girado por las espiras libres va a depender de los bloqueos y desbloqueos en árbol y carcasa.

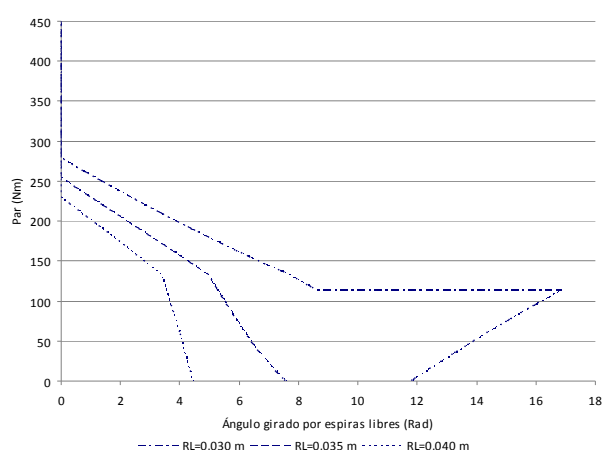


Figura 45. Influencia del radio del árbol sobre ángulo girado por las espiras libres.

En la Figura 45 se observa que el aumento del radio del árbol genera una disminución del giro de las espiras libres, ya que la longitud útil va a ser bloqueada en el árbol por disminución de la curvatura mínima de bloqueo. En la familia de curvas mostradas se observan dos zonas diferenciadas, aunque ambas con un comportamiento lineal. La primera de ellas comprende desde el par inicial hasta el desbloqueo en la carcasa, con ángulo girados cada vez menor con el aumento del radio del árbol. La segunda comprende hasta el bloqueo total de la longitud del fleje en el árbol, produciéndose un cambio de pendiente entre ambos comportamientos lineales.

- Consideraciones sobre la variación del ángulo girado por las espiras bloqueadas en el árbol con el radio del este. El aumento del radio del árbol implica la existencia de espiras bloqueadas desde el par inicial, debido a la disminución de la curvatura de bloqueo. El bloqueo total de espiras en el árbol se adelanta con el aumento del radio del árbol. La zona de comportamiento vertical se produce a menor ángulo girado debido a la disminución de la curvatura del árbol.

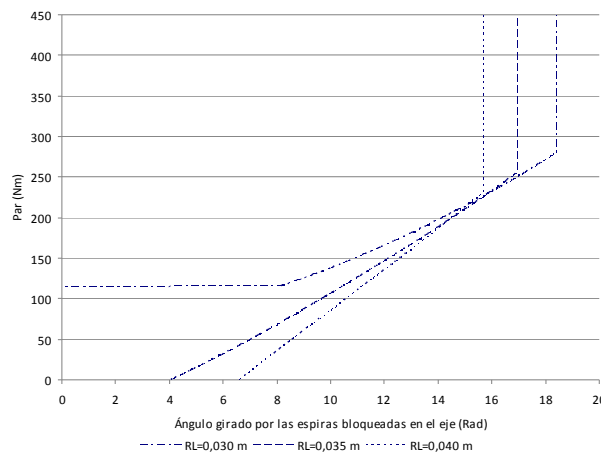


Figura 46. Influencia del radio del árbol sobre ángulo girado por las espiras bloqueadas en el árbol.

Influencia de otras variables de diseño sobre la curva característica.

Adicionalmente a los parámetros anteriormente analizados, como principales fuentes de distorsión de la curva característica especificada, se analizan otros factores de influencia del diseño, y las correlaciones existentes entre ellas. Se toma como base para su representación gráfica el resorte de baja variabilidad del par, cuyo diseño se plantea en los siguientes capítulos.

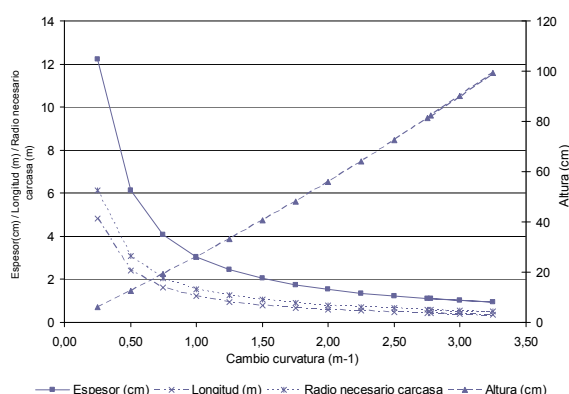


Figura 47. Influencia del cambio de curvatura en diferentes parámetros de diseño.

En la Figura 47 se observa la correlación obtenida entre las dimensiones principales de un fleje rectangular (espesor, altura y longitud) frente al cambio de curvatura y el radio mínimo de la carcasa. El radio mínimo de la carcasa es obtenido a partir de las espirales bloqueadas en la carcasa y en el árbol, así como la necesidad de giro de las espiras libres en funcionamiento. Se observa que el aumento del cambio de curvatura implica una disminución de la longitud, del espesor y del radio de la carcasa. Dichas variaciones tiene una ley exponencial decreciente, con límite inferior las dimensiones mínimas para grandes cambios de curvatura. El aumento del cambio máximo de curvatura genera un aumento de la altura del fleje, siendo esta variación lineal.

En lo referente al cambio de curvatura máximo se comparan el radio y la altura de la carcasa (Figura 48). El valor del radio es decreciente con el cambio de curvatura mientras que la altura de la carcasa es creciente. La altura de la carcasa será como mínimo la altura de la sección resistente del fleje en la sección de longitud inicial.

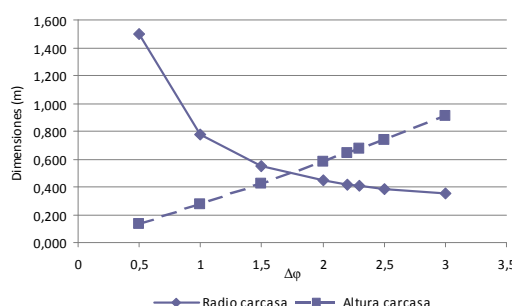


Figura 48. Dimensiones de la carcasa en función del cambio de curvatura.

En la Figura 49, se observa que el espesor del fleje es invariante ante el par, con valor creciente de la altura del fleje. Se supone que las características del material son constantes, por lo que al aumentar el

par tiene que aumentar la inercia de la sección resistente. En el caso representado gráficamente se mantiene constante el espesor aumentando la altura. El aumento del par nominal implica también una disminución del radio mínimo de la carcasa y la longitud, para la misma energía almacenada.

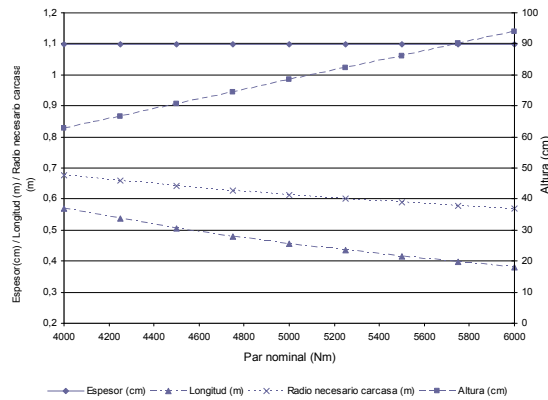


Figura 49. Influencia del par de diseño en diferentes parámetros de diseño.

La Figura 50 compara la energía con la máxima potencial respecto a la variabilidad del par a obtener. Para resortes con baja variabilidad del par la energía es empleada para mantener dicha variabilidad y no para almacenar energía. Sin embargo para resortes con mayor variabilidad del par la energía se emplea directamente en el resorte, ya que no se destina a mantener la constancia del par.

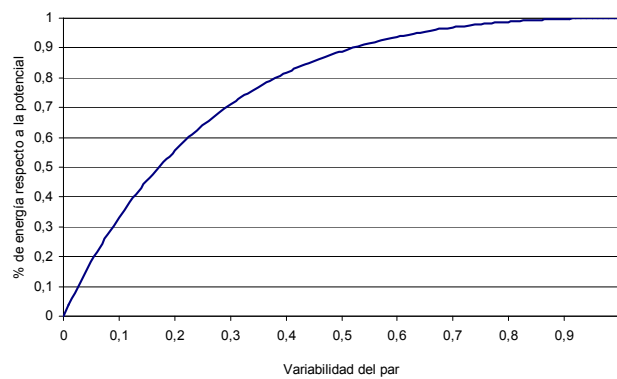


Figura 50. Porcentaje de la energía respecto a la potencial en función de la variabilidad del par.

La Figura 51 muestra la variación del ángulo girado por el resorte para diferentes longitudes del mismo. Se observa el diferente comportamiento en función del modelo con o sin influencia del espesor del fleje, así como para diferentes valores de espesor. Con el modelo que no tiene en cuenta el espesor, el ángulo girado por el resorte es proporcional a la longitud del fleje. Sin embargo, al tener el espesor como variable que aumenta el radio del árbol y disminuye el radio de la carcasa, el comportamiento no es lineal, sino

parabólico. Existe una longitud óptima para el máximo del ángulo girado, y por tanto de energía almacenada. Obsérvese también la analogía de dicha gráfica con la *Figura 7 (b)*.

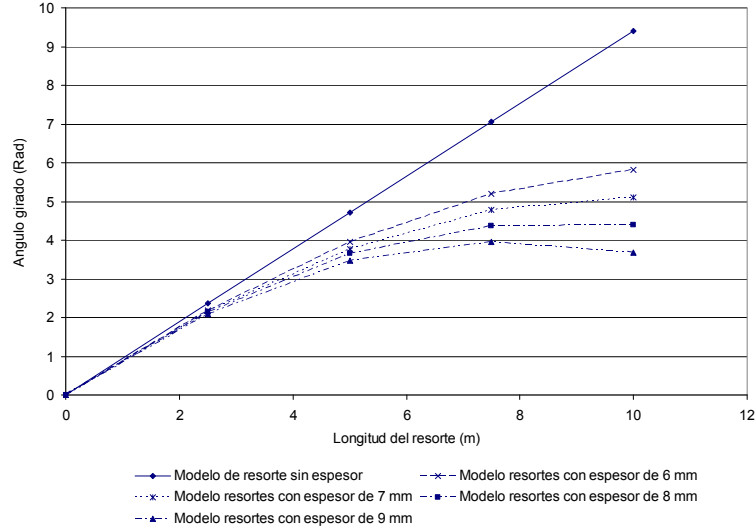


Figura 51. Influencia del ángulo girado con la longitud del fleje y el modelo con o sin espesor.

3.3.- Enfoque energético.

Se han analizado tanto los factores de influencia como el comportamiento del resorte espirales a torsión desde un enfoque cinemático, pero sin tener cuenta la energía puesta en juego tanto por la curva característica a obtener como por las posibles pérdidas en los procesos de carga y/o descarga. De forma genérica, la energía por unidad de volumen es proporcional de forma cuadrática a la tensión e inversamente proporcional al módulo de elasticidad del material del fleje. Dicha variación puede expresarse tanto en función de la longitud como del ángulo.

$$dW = k \cdot \frac{\sigma^2}{E} \cdot dV = k \cdot \frac{\sigma^2}{E} \cdot A \cdot dl = k \cdot \frac{\sigma^2}{E} \cdot A \cdot \frac{1}{\frac{\partial C}{\partial l}} \cdot dC \quad (78)$$

La energía total se obtiene a partir de la curva característica, ya que la energía es la integral hasta el ángulo máximo girado del par por el ángulo girado.

$$W_{Total} = \int_0^{\Phi_{Max}} M(\Phi) \cdot d\Phi \quad (79)$$

La diferencia entre la energía teórica y la real vendrá dada por una parte por la pérdida debida al rozamiento entre espiras y por otra parte por la falta de aprovechamiento del par. Se define el coeficiente r_B de pérdidas debidas al bloqueo de espiras y el coeficiente r_M por falta de aprovechamiento de par. En función de dichos coeficientes es posible cuantificar la energía total respecto a la potencial. En dicha formulación

W'_{Total} tiene en cuenta únicamente los efectos del bloqueo mientras que W_{Total} considera tanto este efecto como el efecto del par.

$$r_B = \frac{W'_{Total}}{W_{Potencial}} = \frac{W_{Potencial} - W_{Perdidas}}{W_{Potencial}} \quad (80)$$

$$r_M = \frac{W_{M \min - M \max}}{W_{0 - M \max}} \quad (81)$$

$$W_{Total} = r_B \cdot r_M \cdot W_{Potencial} \quad (82)$$

La cuantificación del coeficiente de pérdidas por no aprovechamiento de par se calcula numéricamente a través de la integración, entre los límites de par de funcionamiento, de la curva de comportamiento.

$$W_{0 - M \max} = \int_0^{M \max} M(\Phi) \cdot d\Phi \quad W_{M \min - M \max} = \int_{M \min}^{M \max} M(\Phi) \cdot d\Phi \quad (83-84)$$

Por otra parte, para poder obtener la longitud para almacenar la energía requerida es necesario primeramente cuantificar la energía no aprovechada por el bloqueo de espiras y por tener un par inferior al máximo admisible.

$$W_{Perdidas} = \int_{C_{00}}^{C_0} k(C) \cdot \frac{\sigma^2(C)}{E(C)} \cdot A(C) \cdot \frac{1}{\frac{\partial C}{\partial l}} \cdot dC \quad (85)$$

$$W_{Potencial} = \int_{C_{00}}^{C_{0L}} k(C_0) \cdot \frac{\sigma^2(C)}{E(C)} \cdot A(C) \cdot \frac{1}{\frac{\partial C}{\partial l}} \cdot dC \quad (86)$$

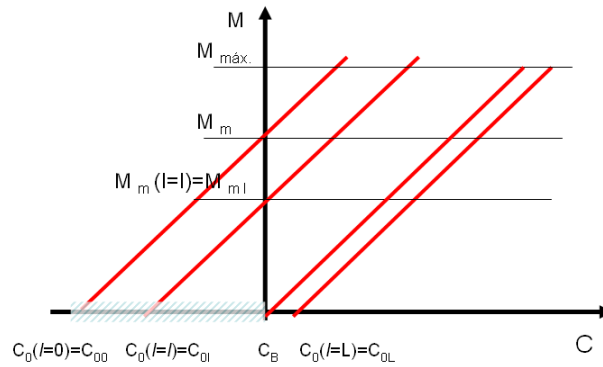


Figura 52. Relación entre curvaturas y pares en bloqueo en carcasa.

Para la integración anterior se analiza la relación entre curvaturas y pares en el bloqueo en la carcasa. Es posible obtener la relación entre pares y curvaturas en función de la longitud y de unos valores fijos (Figura 52).

Para cada sección se cumple

$$\frac{C_B - C_{00}}{M_m} = \frac{C_B - C_{0l}}{M_{ml}} \quad (87)$$

Por otra parte, definiendo el parámetro $\omega(C)$ como el cociente entre la inercia y la distancia a la fibra neutra, se puede transformar las expresiones en las que aparece el par, (que en un principio depende de la curvatura en cada longitud) en una dependencia con la tensión y unos valores fijos (*Figura 52*),

$$\sigma(C) = \frac{M(C)}{\omega(C)} \quad (88)$$

Introduciendo las expresiones anteriores en las ecuaciones desarrolladas es posible obtener la energía no aprovechable debido al bloqueo de espiras.

$$W_{Perdidas} = \int_{C_{00}}^{C_B} k(C) \cdot \frac{M_{ml}^2(C) \cdot A(C)}{\omega^2(C) \cdot E(C)} \cdot \frac{1}{\frac{\partial C}{\partial l}} \cdot dC = \frac{M_m^2}{C_B - C_{00}} \cdot \int_{C_{00}}^{C_B} \frac{k(C) \cdot A(C)}{\omega^2(C) \cdot E(C)} \cdot (C_B - C_{0l}) \cdot \frac{1}{\frac{\partial C}{\partial l}} \cdot dC \quad (89)$$

De una forma análoga es posible calcular la energía potencial máxima, ya que en este caso la tensión del material será el par máximo entre el parámetro $\omega(C)$ definido,

$$W_{Potencial} = \int_{C_{00}}^{C_{0l}} k(C) \cdot \frac{A(C)}{E(C)} \cdot \left(\frac{M_{Max}}{\omega(C)} \right)^2 \cdot \frac{1}{\frac{\partial C}{\partial l}} \cdot dC = M_{Max}^2 \int_{C_{00}}^{C_{0l}} \frac{k(C)}{\omega(C)^2} \cdot \frac{A(C)}{E(C)} \cdot \frac{1}{\frac{\partial C}{\partial l}} \cdot dC \quad (90)$$

La falta de aprovechamiento debido al bloqueo de espiras tiene en cuenta únicamente el desbloqueo en la carcasa al considerarse que el bloqueo en el árbol no va a generar falta de aprovechamiento, al poderse diseñar la sección resistente optimizada para trabajar a la máxima tensión. Si existiese falta de aprovechamiento en el árbol, el tratamiento numérico sería parecido.

Por otra parte para analizar el coeficiente de falta de aprovechamiento debido a no trabajar al par máximo, r_M , se dispone de las siguientes expresiones

$$dW_{Potencial} = k \cdot \frac{\sigma_{Max}^2}{E} \cdot dV \quad dW_M = k \cdot \frac{\sigma^2}{E} \cdot dV \quad (91-92)$$

Aplicando la correlación obtenida en la *Figura 52*

$$\frac{dW_M}{dW_{Potencial}} = \frac{M_{Max}^2 - M^2}{M_{Max}^2} = 1 - \left(\frac{M}{M_{Max}} \right)^2 \quad (93)$$

Así por ejemplo si se tiene un par de valor la mitad del máximo, se dispone en cada sección de un aprovechamiento del 75% frente al máximo. Adicionalmente, para calcular el valor del coeficiente de falta de aprovechamiento del par respecto al máximo, se deberá integrar a lo largo de toda la longitud del fleje,

$$\frac{W_M}{W_{Potencial}} = \int_{C_{10}}^{C_{1l}} \left(1 - \left(\frac{M}{M_{Max}} \right)^2 \right) \cdot \frac{1}{\frac{\partial C}{\partial l}} \cdot dC \quad (94)$$

3.3.1.- Cálculo mediante análisis energético de la curva característica.

El hecho de tener bloqueo inicial en la carcasa hace disminuir la energía útil del resorte, es decir, la empleable en la curva característica par - ángulo girado. Para obtener dicha curva se supone que la única fuente de falta de aprovechamiento energética es el bloqueo en la carcasa. No se considerarán ni la posible existencia de bloqueo en el árbol ni debidas al uso de una parte de la curva de par. Por tanto la diferencia entre el trabajo potencial y las ineficiencias de bloqueo es la integral de la curva característica par – ángulo girado. Si existiesen otras causas, estas deberían ser tenidas en cuenta como otros términos negativos que restasen a la potencial. La formulación de energía potencial, bloqueo y total ha sido obtenida en los análisis anteriores.

$$W_{Potencial} - W_{Perdidas_bloqueo} = W_{Total} \quad (95)$$

$$\int_{C_{00}}^{C_{0L}} k(C) \cdot \frac{\sigma^2(C)}{E(C)} \cdot A(C) \cdot \frac{1}{\partial C} \cdot dC - \int_{C_{00}}^{C_g} k(C) \cdot \frac{\sigma^2(C)}{E(C)} \cdot A(C) \cdot \frac{1}{\partial C} \cdot dC = \int_0^{\Phi_{Max}} M(\Phi) \cdot d\Phi \quad (96)$$

Estas expresiones permitirían calcular el número de vueltas totales que dará el resorte, siempre que se conozca la forma de la curva par - ángulo girado. En cambio es posible calcular tanto la forma como el número de vueltas si en lugar de evaluar la expresión anterior para el par máximo se evalúan para incrementos de par (ΔM) tan pequeños como se desee, y suponer que en dichos tramos la curva par ángulo girado puede ser considerada lineal. Así todos los parámetros son conocidos salvo la variación del ángulo girado para el incremento de par dado.

$$W_{PotenciaM}^{M+\Delta M} - W_{Perdidas_bloqueoM}^{M+\Delta M} = W_{TotalM}^{M+\Delta M} = M \cdot \Delta\Phi \quad (97)$$

Al considerar el cálculo secuencial para incrementos de par, las expresiones anteriores se ven simplificadas. Adicionalmente, para cada valor del par se considera que no existe variación de los parámetros de la formulación (tanto área, coeficiente k , módulo resistente...) ni con la curvatura ni con la longitud. En las variaciones incrementales se considera más sencillo los cálculos a través de longitudes que con las variaciones de curvaturas. El ángulo girado se puede expresar:

$$M \cdot \Delta\Phi = k \cdot \frac{A}{E} \cdot \left(\frac{M}{\omega}\right)^2 \cdot \Delta l(C_{00} : C_{0L}) - k \cdot \frac{A}{E} \cdot \left(\frac{M}{\omega}\right)^2 \cdot \Delta l(C_B : C_{00}) \quad (98)$$

Las variaciones de las longitudes a par constante, para las curvaturas definidas, son la longitud total y bloqueada en la carcasa, al considerarse que no existe bloqueo en el eje. Así, con la constancia del resto de parámetros, la expresión del ángulo girado se simplifica.

$$\Delta\Phi = k \cdot \frac{M}{\omega^2} \cdot \frac{A}{E} \cdot (I_{total} - I_{bloqueada_carcasa}) \quad (99)$$

El cálculo de la energía no aprovechada por bloqueo en función del par debe tener en cuenta la diferente casuística en función de que las espiras estén libres o bloqueadas en la carcasa. El análisis de los dos casos es diferente, ya que en el primer sumando se debe realizar un análisis análogo a las correlaciones empleadas en el epígrafe anterior, mientras que en el segundo la curvatura será la de la carcasa (*Figura 53*)

$$W_{Perdidas} = \int_{C_{00}}^{C_B} k(C) \cdot \frac{\sigma^2(C)}{E(C)} \cdot A(C) \cdot \frac{1}{\frac{\partial C}{\partial l}} \cdot dC = \int_{C_{00}}^{C_{0M}} k(C) \cdot \frac{\sigma^2(C)}{E(C)} \cdot A(C) \cdot \frac{1}{\frac{\partial C}{\partial l}} \cdot dC + \int_{C_{0M}}^{C_{0L}} k(C) \cdot \frac{\sigma^2(C)}{E(C)} \cdot A(C) \cdot \frac{1}{\frac{\partial C}{\partial l}} \cdot dC \quad (100)$$

Este análisis describe el sentido energético de la curva par – ángulo girado, en el que si hay desbloqueo en la carcasa, hay energía que no se aprovecha. Al ir desbloqueando, cada vez se aprovecha más, por lo que se tiene energía para proporcionar un mayor ángulo girado para un mismo incremento de par. Así si no hay desbloqueo siempre se aprovecha toda la variación de ángulo girado para el mismo incremento de par. Por otra parte la ineficiencia de no aprovechamiento de la tensión máxima admisible se materializa en disponer una tensión en el material inferior a la máxima, con lo que el ángulo girado se vería modificado en la misma proporción.

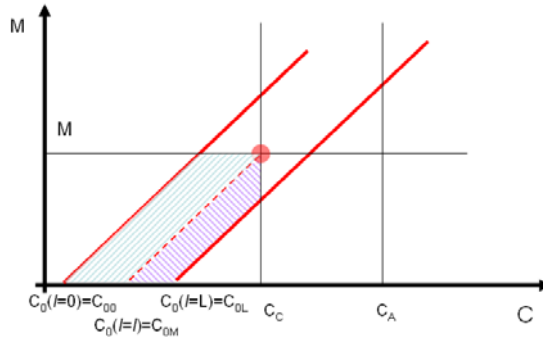


Figura 53. Cálculo del desaprovechamiento de energía por bloqueo en dos sumandos.

3.3.2.- Cálculo mediante análisis energético de la fuerza entre resorte y fleje.

La existencia de bloqueo en la carcasa implica la falta aprovechamiento de toda la energía potencial del resorte. Es la responsable de que el resorte se desenrolle desde el par de montaje hasta alcanzar el par mínimo de funcionamiento, en el que toda la longitud está bloqueada sobre la carcasa, y una vez se llega a este estado, es la que permite la deformación elástica de la carcasa.

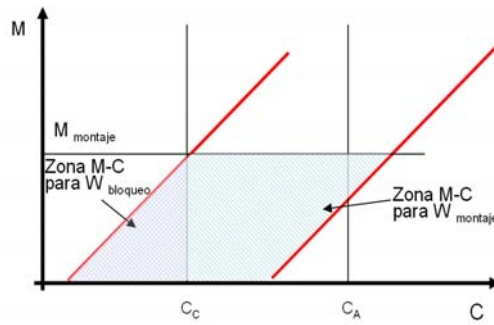


Figura 54. Gráfica de energías de bloqueo y montaje para la obtención fuerza de contacto.

Con el análisis energético también es posible obtener la fuerza de contacto entre la carcasa y el resorte. Para ello se observa en la gráfica par – curvatura (Figura 54) la existencia de dos zonas, que permitirán calcular las energías puestas en juego, en la carga del resorte para el montaje en la carcasa ($W_{montaje}$) y la energía de bloqueo una vez soltado el fleje y bloqueado todo él contra la carcasa ($W_{bloqueo}$). La diferencia entre ambas energías será la que entre en juego en el contacto carcasa – fleje ($W_{contacto}$).

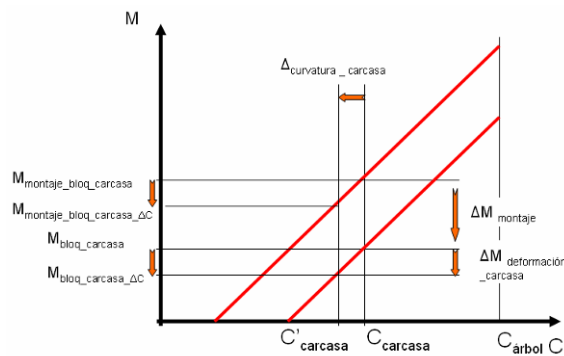


Figura 55. Gráfica par - curvatura para la obtención fuerza de contacto.

Para el cálculo de la fuerza de contacto se supone el caso particular de un resorte con curvaturas a lo largo de la longitud menor que la curvatura tanto de la carcasa como del árbol (Figura 55). Para el montaje del resorte la curvatura del fleje debe ser menor que la curvatura de la carcasa ($M_{montaje_bloq_carcasa}$). Una vez realizado el montaje y sin aplicar par, cierta longitud va a estar bloqueada en la carcasa existiendo un par remanente ($M_{bloq_carcasa}$). La diferencia entre dichos pares será el incremento de par necesario para el montaje del resorte en la carcasa. El proceso de montaje del fleje en la carcasa tiene como efecto la deformación con aumento del radio de esta. Se supone, para el análisis y cálculo posterior, un incremento uniforme del radio de la carcasa producido por una hipotética presión interna uniforme. Bajo dicha hipótesis, la tensión de la deformación de la carcasa y la energía de deformación se puede expresar

$$\sigma = q \cdot \frac{R}{t} = \left(\frac{\Delta R \cdot E \cdot t}{R^2} \right) \cdot \frac{R}{t} = \frac{\Delta R \cdot E}{R} \quad W = \frac{\sigma^2}{E \cdot \rho} = \frac{\Delta R^2 \cdot E}{R^2 \cdot \rho} \quad (101-102)$$

Para la obtener la deformación de la carcasa y la fuerza de contacto entre la carcasa deformada y el resorte montado, se debe establecer el punto de equilibrio entre la energía de deformación de la carcasa (expresiones anteriores bajo el modelo de deformación uniforme de la carcasa) y la energía de bloqueo del resorte entre montaje y el bloqueo del fleje en la carcasa. El incremento de par para el cálculo de la fuerza de contacto será la diferencia entre los puntos de bloqueo de la sección inicial entre la curvatura de la carcasa y la de la carcasa deformada (*Figura 55*). El punto de intersección entre ambas curvas permitirá obtener directamente el valor del nuevo radio de la carcasa y de la energía puesta en juego para dicha deformación.

Para este análisis se considera que no existe ninguna otra fuente de pérdidas adicionales a las de bloqueo en la carcasa que pudiese producir aumento de la fuerza de contacto. En el caso de que existiesen pérdidas los valores calculados a continuación serían mayoración de los reales, por lo que el cálculo sería válido con un determinado coeficiente de seguridad.

Capítulo 4.- ESTUDIO ANALÍTICO. CASO PARTICULAR DE RESORTES CON CURVA GENERATRIZ CLOTOIDAL Y VARIACIÓN DE LA RIGIDEZ A FLEXIÓN CON LA LONGITUD.

Una vez analizado el comportamiento general de los resortes espirales a torsión, se estudia el caso particular de aquellos con curva generatriz clotoïdal y variación de la rigidez a flexión inversamente proporcional a la longitud, ya que, como se desarrollará más adelante, permiten ser estudiados analíticamente. Se analizan los parámetros geométricos y resistivos, su proceso de funcionamiento y su curva característica. Va a ser posible obtener las restricciones y bases de diseño para la definición de un procedimiento específico de diseño compatible y coherente con el general del capítulo anterior.

4.1.- Modelo de resortes con curva generatriz clotoïdal y variación de la rigidez a flexión con la longitud.

La curva clotoïdal se caracteriza por tener curvatura que varía linealmente con su longitud. Ha sido utilizada históricamente en diferentes aplicaciones industriales, desde el trazado de curvas de transición en el ferrocarril hasta en la circulación por carretera. Su empleo es debido a que un vehículo que siga dicha curva a velocidad constante tendrá una aceleración centrípeta linealmente creciente; lo que suaviza las fuerzas sobre la carga y pasajeros. Así mismo, es posible definir una curvatura generalizada o aproximación mediante ecuación linealizada de la curva para cualquier resorte. Con ello se puede proceder a realizar un estudio analítico similar al que se desarrolla a continuación, teniéndose en cuenta el error cometido en la aproximación de la espiral definida respecto a la expresión polinómica.

En cualquier espiral se cumple la siguiente relación longitud – ángulo, siendo $\rho(l)$ el radio de curvatura, $C(l)$ la curvatura y l la posición de la sección a estudio respecto al origen del fleje, situado en este caso en la carcasa.

$$dl = \rho(l) \cdot d\varphi \quad d\varphi = C(l) \cdot dl \quad (103)$$

Se analiza un fleje clotoïdal no montado, de longitud L_0 , cuya curvatura $C_0(l)$ varía linealmente con la longitud con un parámetro independiente a y otro dependiente de la longitud b/L_0 .

$$C_0(l) = a + b \cdot \frac{l}{L_0} \quad (104)$$

Supóngase además que la rigidez a flexión varía de forma inversamente proporcional a la longitud, mediante la definición de un parámetro de variación denominado ξ (dicha variación se verá plasmada en una variación de la geometría y/o del material).

$$E \cdot I(l) = \frac{E_0 \cdot I_0}{1 + \xi \cdot \frac{l}{L_0}} \quad (105)$$

$$\mu = \frac{M}{E_0 \cdot I_0} \quad (106)$$

Se define así mismo el parámetro adimensional μ que representa el par aplicado entre la rigidez a flexión de la sección inicial del fleje, siendo por tanto una adimensionalización del par en la unión a la carcasa.

Para dar mayor generalidad al estudio no se fijan inicialmente los valores de ninguna de las variables de diseño. Sin embargo, si se requiere unaa rigidez a flexión positiva se deberá realizar el diseño con parámetro de variación de la rigidez a flexión mayor que menos uno ($\xi > -1$), y en concreto, si el coeficiente ξ es positivo la rigidez a flexión será progresivamente decreciente mientras que si es negativo será creciente.

Al conocer la variación de la curvatura y de la inercia en función de la longitud del fleje, se observa que, la clotoide deformada vuelve a ser otra clotoide. Los parámetros de esta segunda clotoide pueden ser obtenidos de manera sencilla, en función de los parámetros de diseño. Para parámetro de variación de la rigidez a flexión igual a cero la sección del resorte es constante a lo largo de su longitud, lo cual permite abarcar la mayoría de los casos de resortes espirales de uso habitual en la técnica.

$$C(l) - C_0(l) = \frac{M}{E(l) \cdot I(l)} - \frac{M}{E_0 \cdot I_0} = \frac{M}{E_0 \cdot I_0} \cdot \left(1 + \xi \cdot \frac{l}{L_0} \right)$$

$$C(l) = (a + \mu) + (b + \xi \cdot \mu) \cdot \frac{l}{L_0} \quad (107)$$

El fleje estará alojado en una carcasa fija de radio R y será actuado mediante un par en un árbol de radio R_L , de igual manera que en el comportamiento general del capítulo anterior mostrado en la *Figura 20*. Al introducir el fleje, entre la carcasa y el árbol, quedarán espiras bloqueadas eventualmente tanto en el árbol como en la carcasa. Las espiras bloqueadas en la carcasa tendrán una longitud de valor $R \beta(M)$ (desconocido de momento, siendo $\beta(M)$ el ángulo de bloqueo exterior o en la carcasa). Así mismo las espiras bloqueadas en el árbol tendrán una longitud de valor $R_L \theta(M)$ (siendo $\theta(M)$, también desconocido, el ángulo de bloqueo interior o en el árbol).

Para el cálculo del ángulo girado por las espiras, se requiere poder delimitar el ángulo comprendido por la longitud libre del fleje. Al permanecer invariable la longitud total del resorte con el par aplicado (ya que las cargas de tracción – compresión y cortadura se consideran despreciables frente a las de flexión, según ha

sido analizado con anterioridad la zona de espiras no bloqueadas se extenderá desde la longitud bloqueada en la carcasa hasta la longitud equivalente a la total menos la bloqueada en el árbol.

$$\begin{aligned}
 \varphi &= \int_{R\beta}^{L_0-R_L\theta} d\varphi = \int_{R\beta}^{L_0-R_L\theta} C(l)dl = \left[(a+\mu)l + (b+\xi\mu)\frac{l^2}{2L_0} \right]_{R\beta}^{L_0-R_L\theta} = (L_0-R_L\theta) \cdot \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{1}{R_L} + (a+\mu) \right] - R\beta \cdot \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{1}{R} + (a+\mu) \right] \\
 \varphi &= \frac{L_0}{2 \cdot (b+\mu\xi)} \left[\left(\frac{1}{R_L} \right)^2 - (a+\mu) + (a+\mu) - \left(\frac{1}{R} \right)^2 \right] = \frac{L_0}{2 \cdot (b+\mu\xi)} \cdot \left[\frac{1}{R_L} + \frac{1}{R} \right] \cdot \left[\frac{1}{R_L} - \frac{1}{R} \right] = \frac{L_0 \cdot \gamma \cdot \delta}{2 \cdot (b+\mu\xi)}
 \end{aligned} \tag{108}$$

siendo

$$\delta = \left[\frac{1}{R_L} + \frac{1}{R} \right] \quad \gamma = \left[\frac{1}{R_L} - \frac{1}{R} \right] \tag{109-110}$$

Para obtener los ángulos de bloqueo en la carcasa y en el árbol ($\beta(M)$ y $\theta(M)$ respectivamente, que se representarán por sencillez de escritura como β y θ) se aplicará directamente la consideración de que para las longitudes bloqueadas en la carcasa y en el árbol, con valores $R\beta$ y L_0-RL_0 los radios de curvatura son constantes e iguales a las inversas de los radios de la carcasa y del árbol.

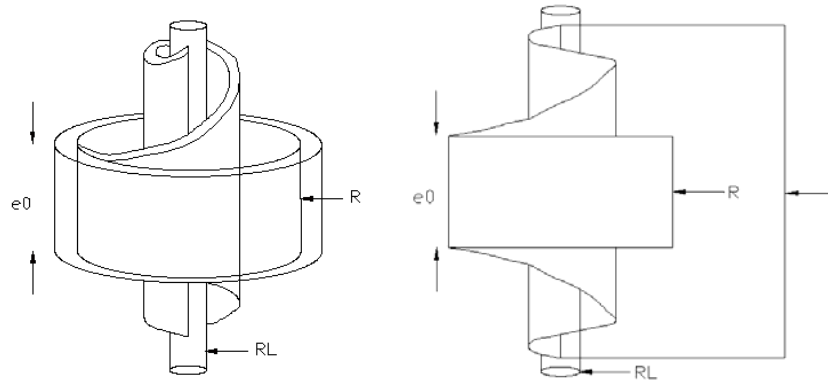


Figura 56. Representación grafica del resorte.

Para la longitud de bloqueo en la carcasa se tiene una curvatura igual al inverso del radio de curvatura de esta y para una longitud igual al bloqueo en el árbol la curvatura será igual al inverso del radio de este.

$$\begin{aligned}
 C(l) &= \frac{1}{R} = (a+\mu) + (b+\xi \cdot \mu) \cdot \frac{R \cdot \beta}{L_0} & \frac{R \cdot \beta}{L_0} &= \frac{\frac{1}{R} - (a+\mu)}{(b+\xi \cdot \mu)} \\
 C(l) &= \frac{1}{R_L} = (a+\mu) + (b+\xi \cdot \mu) \cdot \frac{L_0 - R_L \cdot \theta}{L_0} & \frac{L_0 - R_L \cdot \theta}{L_0} &= \frac{\frac{1}{R_L} - (a+\mu)}{(b+\xi \cdot \mu)}
 \end{aligned}$$

Con dichas relaciones, se pueden obtener los ángulos de bloqueo en el árbol y la carcasa,

$$\beta = \frac{L_0}{R} \cdot \frac{\frac{1}{R} - (a+\mu)}{(b+\xi \cdot \mu)} \quad \theta = \frac{L_0}{R_L} \left(1 - \frac{\frac{1}{R_L} - (a+\mu)}{(b+\xi \cdot \mu)} \right) \tag{111-112}$$

A partir de los ángulos girados por las espiras libres y las bloqueadas, tanto en el árbol como en la carcasa, se obtiene el ángulo girado por el resorte ante una determinada variación de par. Dicho ángulo $\Phi(M)$, vendrá dado por la suma de los tres ángulos anteriores en función del coeficiente μ .

$$\begin{aligned}\Phi &= \beta + \varphi + \theta = \frac{L_0}{R} \cdot \frac{1/R - (a + \mu)}{(b + \xi \cdot \mu)} + \frac{L_0 \cdot \gamma \cdot \delta}{2 \cdot (b + \mu \xi)} + \frac{L_0}{R_L} \left(1 - \frac{1/R_L - (a + \mu)}{(b + \xi \cdot \mu)} \right) = \\ &= \frac{L_0}{R_L} + \frac{L_0}{(b + \xi \cdot \mu)} \left(\frac{1/R - (a + \mu)}{R} + \frac{\gamma \cdot \delta}{2} - \frac{1/R_L - (a + \mu)}{R_L} \right) = \frac{L_0}{R_L} + \frac{L_0}{(b + \xi \cdot \mu)} \left(\frac{1}{R^2} - \frac{a + \mu}{R} + \frac{\gamma \cdot \delta}{2} - \frac{1}{R_L^2} - \frac{a + \mu}{R_L} \right) = \\ &= \frac{L_0}{R_L} + \frac{L_0}{(b + \xi \cdot \mu)} \left(\frac{1}{R^2} - \frac{a + \mu}{R} + \frac{\gamma \cdot \delta}{2} - \frac{1}{R_L^2} - \frac{a + \mu}{R_L} \right) = \frac{L_0}{R_L} + \frac{L_0}{(b + \xi \cdot \mu)} \left(\frac{\gamma \cdot \delta}{2} - \gamma \cdot \delta - (a + \mu) \cdot \gamma \right) = \\ &\Phi = \frac{L_0}{R_L} + L_0 \cdot \gamma \frac{a + \mu - \delta/2}{b + \mu \cdot \xi}\end{aligned}\quad (113)$$

En el planteamiento anterior no se ha sido tenido en cuenta la variabilidad máxima admisible del par, definida mediante el parámetro de diseño ε . Para su análisis, se va a realizar un desarrollo análogo al anterior entre los dos estados límites de baja variabilidad del par, con valor nominal M , que será representado por el subíndice 0. Se representará por el subíndice 1 el límite superior, con par de valor $M(1 + \varepsilon)$, y subíndice 2 para el límite inferior, con valor de par $M(1 - \varepsilon)$. Para el límite superior del par se obtienen las siguientes expresiones para los ángulos girados y bloqueados,

$$C_1(l) = [a + \mu \cdot (1 + \varepsilon)] + [b + \xi \cdot \mu \cdot (1 + \varepsilon)] \cdot \frac{l}{L_0} \quad (114)$$

$$\beta_1 = \frac{L_0}{R} \cdot \frac{1/R - [a + \mu \cdot (1 + \varepsilon)]}{b + \xi \cdot \mu \cdot (1 + \varepsilon)} \quad \varphi_1 = \frac{L_0 \cdot \delta \cdot \gamma}{2 \cdot [b + \mu \cdot \xi \cdot (1 + \varepsilon)]} \quad \theta_1 = \frac{L_0}{R_L} - \frac{L_0}{R_L} \cdot \frac{1/R_L - [a + \mu \cdot (1 + \varepsilon)]}{b + \xi \cdot \mu \cdot (1 + \varepsilon)} \quad (115-116-117)$$

$$\Phi_1 = \frac{L_0}{R_L} + L_0 \cdot \gamma \frac{A + \varepsilon \cdot \mu}{B + \xi \cdot \mu \cdot \varepsilon} \quad (118)$$

$$A = a + \mu - \frac{\delta}{2} \quad B = b + \xi \cdot \mu \quad (119-120)$$

Para el límite inferior del par, se tienen los siguientes valores,

$$C_2(l) = [a + \mu \cdot (1 - \varepsilon)] + [b + \xi \cdot \mu \cdot (1 - \varepsilon)] \cdot \frac{l}{L_0} \quad (121)$$

$$\beta_2 = \frac{L_0}{R} \cdot \frac{1/R - [a + \mu \cdot (1 - \varepsilon)]}{b + \xi \cdot \mu \cdot (1 - \varepsilon)} \quad \varphi_2 = \frac{L_0 \cdot \delta \cdot \gamma}{2 \cdot [b + \mu \cdot \xi \cdot (1 - \varepsilon)]} \quad \theta_2 = \frac{L_0}{R_L} - \frac{L_0}{R_L} \cdot \frac{1/R_L - [a + \mu \cdot (1 - \varepsilon)]}{b + \xi \cdot \mu \cdot (1 - \varepsilon)} \quad (122-123-124)$$

$$\Phi_2 = \frac{L_0}{R_L} + L_0 \cdot \gamma \frac{A - \varepsilon \cdot \mu}{B - \xi \cdot \mu \cdot \varepsilon} \quad (125)$$

Por lo que el giro del resorte dentro de la zona de baja variabilidad del par, será la diferencia entre los ángulos girados en ambos estados 2 y 1 del par,

$$\Delta\Phi = \Phi_2 - \Phi_1 = 2 \cdot L_0 \cdot \gamma \cdot \frac{B \cdot \varepsilon \cdot \mu - \xi \cdot A \cdot \mu \cdot \varepsilon}{B^2 - (\xi \cdot \mu \cdot \varepsilon)^2} \quad (126)$$

Se observa que en función de la constancia del par, el ángulo girado por el resorte va a variar. Por tanto, en función de los parámetros de diseño se puede desarrollar un resorte que proporcione un par tan constante como se requiera.

De forma general, interesa que el ángulo girado para el par nominal, sea elevado, lo que se materializa en que el denominador se haga suficientemente elevado para un numerador finito. El valor límite asintótico, mediante el cual se alcanza dicho máximo es el representado en la siguiente ecuación. Dicho valor, el cual no puede ser empleado en la práctica industrial por ser asintótico y requerir de una respuesta de compromiso,

$$\mu = -\frac{b}{\xi} \quad (127)$$

La utilización directa de la ecuación anterior puede ser algo complicada. Sin embargo la aproximación planteada a continuación, es coherente a priori por la definición y utilidad de este tipo de resortes teniéndose que cumplir las relaciones indicadas.

$$(\xi \cdot \mu \cdot \varepsilon)^2 \ll (\xi \cdot \mu)^2 \ll B^2 \quad (128)$$

$$\Delta\Phi = 2 \cdot L_0 \cdot \gamma \cdot \mu \cdot \varepsilon \cdot \frac{b + \xi \cdot \frac{\delta}{2} - \xi \cdot a}{(b + \xi \cdot \mu)^2} \quad (129)$$

La primera de las desigualdades se considera cierta a priori para los resortes de baja variabilidad del par, en el caso extremo el parámetro ε tenderá a cero. La segunda desigualdad tiene sentido al considerar que el parámetro ξ será menor que cero, siendo mucho menor que el valor modificado del coeficiente dependiente del par de la espiral clotoideal. De todas formas en cada caso particular dicha relación debe ser comprobada con anterioridad al empleo de la expresión del ángulo girado reducida.

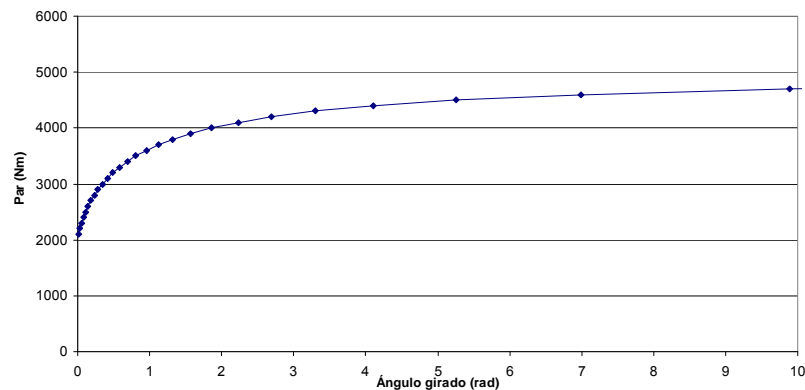


Figura 57. Ángulo girado en función del par aplicado.

La *Figura 57* ilustra la curva par – ángulo girado para el resorte diseñado y fabricado de baja variabilidad del par. Sin embargo debe considerarse, como se plasmará en el análisis de los ensayos realizados, que el modelo desarrollado y planteado con anterioridad, debe aplicarse únicamente en la zona de baja variabilidad del par y no puede ser extrapolable directamente a otros rangos de funcionamiento.

Planteada la forma de la curva característica del resorte y su valor analítico, se procede a analizar el bloqueo, desbloqueo de espiras y la optimización derivada de la eliminación de la longitud no útil. La disposición de las espiras del resorte puede ser representada gráficamente tal y como se indica la *Figura 58*, en la que se representa curvatura de espiras con respecto a la longitud. En la representación de curvaturas intrínsecamente se está representando también el par aplicado, ya que está relacionado con la curvatura y la rigidez a flexión. Dicha figura permite analizar el cambio de curvatura del resorte, las zonas de bloqueo o el funcionamiento de espiras, así como abordar la optimización en su diseño.

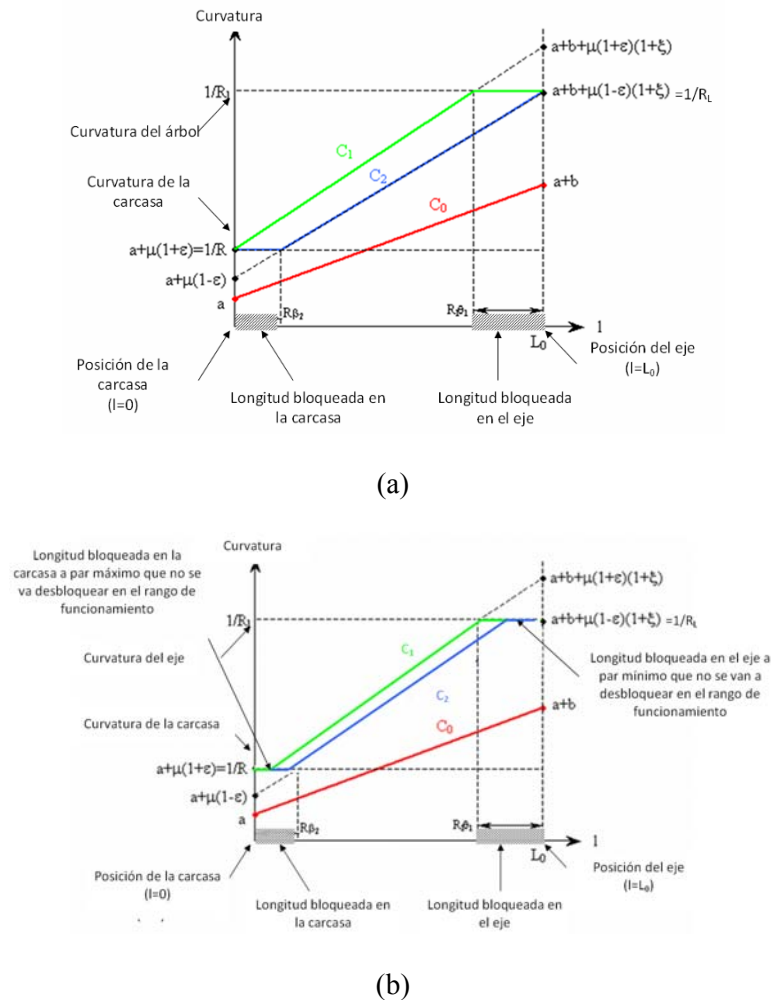


Figura 58. Representación de los estados de funcionamiento del resorte (a) optimizado y (b) sin optimizar.

Se ha representado la variación de la curvatura de las espiras con la longitud del fleje en tres estados de carga: resorte sin montar (curvatura C_0), resorte en límite superior de constancia de par (par aplicado $M(1+\varepsilon)$ y curvatura C_1) y límite inferior de constancia de par (par aplicado $M(1-\varepsilon)$ y curvatura C_2). Para el máximo par ciertas espiras van a bloquearse en el árbol, y por tanto, la curvatura C_1 para la longitud bloqueada $R_L\theta_1$ será la del árbol $1/R_L$. Para disponer de una misma referencia en el posicionado de las espiras y en la medición de las longitudes, esta longitud bloqueada comenzará en $L_0 - R_L\theta_1$. Mientras tanto, para la posición de reposo, la mayor parte de las espiras se encontrarán bloqueadas en la carcasa, con lo que la curvatura C_2 será constante en la longitud bloqueada en la carcasa de valor $R\beta_2$ con curvatura $1/R$. Este caso es aquel en el que todas las espiras del fleje cambian de curvatura en el rango de funcionamiento y produzcan giro del resorte. Toda la longitud del resorte es útil sin existir espiras que no se desbloqueen en el rango de funcionamiento. No existen espiras bloqueadas en la carcasa para par máximo ni espiras bloqueadas en el árbol para par mínimo.

Sin embargo, existen casos en los que el funcionamiento del fleje no está optimizado, son aquellos en los que para el par máximo existen espiras bloqueadas en la carcasa o para el par mínimo en el árbol. En ambos casos las espiras bloqueadas nunca van a desbloquearse, por tanto, dicha longitud de fleje no contribuye al cambio de curvatura ni al giro del resorte. En el diseño se debe de evitar la existencia de longitudes bloqueadas que no se desbloqueen.

Dichas consideraciones se expresan matemáticamente incorporando dos restricciones adicionales sobre los ángulos bloqueados interior (a par mínimo) y exterior (a par máximo), esto es $\beta_1=0$ y $\theta_2=0$. Ambas ecuaciones se pueden desarrollar analizando la *Figura 58* (a) y (b), obteniéndose una relación entre las curvaturas de fabricación del fleje y las del árbol y la carcasa. Pueden darse casos en los que simultáneamente se encuentren las curvaturas C_1 y C_2 con el mismo valor de curvatura ya sea en el árbol o en la carcasa. Este hecho indica que el resorte puede ser optimizado para el funcionamiento completo del fleje.

$$\frac{1}{R} = a + \mu \cdot (1 + \varepsilon) \quad (130)$$

$$\frac{1}{R_L} = a + b + \mu \cdot (1 - \varepsilon) \cdot (1 + \xi) \quad (131)$$

Estas dos ecuaciones permiten obtener los parámetros de diseño de la curva clotoideal de fabricación (a y b) en función de las condiciones de contorno y parámetros de diseño conocidos,

$$a = \frac{1}{R} - \mu(1 + \varepsilon) \quad (132)$$

$$b = \gamma + 2 \cdot \mu \cdot \varepsilon - \xi \cdot \mu \cdot (1 - \varepsilon) \quad (133)$$

La gráfica optimizada permite obtener otra relación de diseño mediante el análisis de la variación de la rigidez a flexión a lo largo de la longitud del fleje y de la tensión máxima admisible del material. De manera

general, puesto que el coeficiente de variación de la rigidez a flexión a lo largo de la longitud debe ser mayor que menos uno, las líneas C_1 y C_2 tendrán mayor pendiente que la C_0 . Para el cambio de curvatura máximo C_L la mayor tensión por flexión ocurrirá en una longitud igual a $L_0 - R_L \theta_1$ para el resorte cargado con $M(1+\varepsilon)$. La condición de diseño adecuada será tal que en esta situación se alcance la tensión máxima admisible del material.

Una vez analizado tanto el par como su variabilidad es importante estudiar la energía almacenada, que puede obtenerse como la suma de las contribuciones individuales de cada sección a lo largo del fleje. Con las consideraciones del modelo, el par no va a variar a lo largo del fleje, por lo que el trabajo será aproximadamente igual a dicho par multiplicado por el ángulo girado entre los estado de baja variabilidad.

$$\mathfrak{T} = \int_0^{\Delta\Phi} M \cdot d\Phi \approx M \cdot \Delta\Phi \quad (134)$$

La energía almacenada, se obtiene a partir del ángulo girado por el resorte, calculado con anterioridad. Para su análisis y simplificar su expresión analítica se van a plantear una relaciones previas entre los parámetros de diseño del resorte.

$$a + \frac{b}{2} = \frac{1}{R} - \mu \cdot (1 + \varepsilon) + \frac{\gamma}{2} + \varepsilon \cdot \mu - \frac{\xi \cdot \mu}{2} \cdot (1 - \varepsilon) = \frac{\delta}{2} - \mu \cdot \left(1 + \frac{\xi}{2}\right) + \frac{\xi \cdot \mu \cdot \varepsilon}{2}$$

$$\frac{\delta}{2} - \mu \cdot \left(1 + \frac{\xi}{2}\right) = 0 \quad \delta = \mu \cdot (2 + \xi) \quad a + \frac{b}{2} = \frac{\xi \cdot \mu \cdot \varepsilon}{2}$$

Con dichas correlaciones, la expresión del ángulo girado por el resorte y la energía se ven simplificadas,

$$\Delta\Phi = 2 \cdot \pi \cdot n \cdot \frac{\frac{\gamma \cdot \varepsilon \cdot \mu}{2} \cdot \frac{b + \xi \cdot \frac{\delta}{2} - \xi \cdot a}{(b + \xi \cdot \mu)^2}}{\frac{\xi \cdot \varepsilon}{2} \cdot \mu} = 2 \cdot \pi \cdot n \cdot \frac{2 \cdot \gamma}{\xi} \cdot \frac{\gamma \cdot \left(1 + \frac{\xi}{2}\right) \cdot \pi \cdot 2 \cdot \mu \cdot \varepsilon \cdot (1 + \xi)}{(\gamma + \xi \cdot \mu \cdot (2 + \xi))^2}$$

$$\frac{\Delta\Phi}{2 \cdot \pi} = n \cdot \frac{2 \cdot \gamma}{\xi} \cdot \frac{\gamma \cdot (2 + \xi) + 4 \cdot \mu \cdot \varepsilon \cdot (1 + \xi)}{(\gamma + \xi \cdot \mu \cdot (2 + \xi))^2}$$

En el caso límite de un resorte con par de muy baja variabilidad, ε inferior a la unidad, las expresiones anteriores pueden ser aproximadas de la siguiente manera, siendo n el número de espiras.

$$\frac{\Delta\Phi}{2 \cdot \pi} \approx n \cdot \frac{\gamma^2 \cdot (2 + \xi)}{\xi \cdot \gamma^2} \approx n \cdot \frac{\xi + 2}{\xi} \quad \frac{\Delta\Phi}{2 \cdot \pi} > n$$

Se observa que las vueltas dadas por el resorte son mayores que el número de espiras con que se fabrica el mismo. Así se demuestra teóricamente la eficacia del dispositivo de transferencia de espiras bloqueadas desde el exterior al interior, que va a permitir que la energía acumulada sea importante. La aplicación de esta formulación simplificada a un caso de diseño concreto requiere de la comprobación de las simplificaciones planteadas.

4.2.- Procedimiento de diseño específico para este tipo de resortes.

El procedimiento genérico de diseño desarrollado en el modelo generalizado es directamente aplicable para este tipo concreto de resortes espirales a torsión. Sin embargo el desarrollo analítico planteado posibilita un procedimiento de diseño paralelo. Ambos métodos son igualmente válidos y coherentes entre sí.

En función de la aplicación para la que sea empleado el resorte, diferentes curvas características van a requerirse. Por ello los datos de partida necesarios para el diseño serán la curva característica par-ángulo girado (par nominal, variabilidad del par y ángulo total girado), las dimensiones del árbol y de la carcasa y el material de fabricación del fleje. Con estas variables de partida, el resto de parámetros son obtenibles a partir de las ecuaciones desarrolladas con anterioridad (parámetros de la clotoide de fabricación, variación de las dimensiones del fleje a lo largo de la longitud...).

El parámetro adimensional del par μ , depende del máximo cambio de curvatura admisible del fleje, sobre el cual tiene influencia directa tanto el material como el espesor del fleje. Como el espesor del fleje influye sobre la altura del mismo, el primer paso en el procedimiento de diseño, será determinar tanto el espesor como la altura del fleje. Es recomendable mantener el espesor constante si se busca baja variabilidad del par ya que de esta forma se alcanzaría el máximo cambio de curvatura admisible y se facilita la fabricación del fleje. Para la determinación de dicho cambio máximo de curvatura diferentes criterios pueden ser empleados, tales como análisis de fatiga [Pook, 2010], modos de fallo en deformación o en tensión. Con el criterio seleccionado, en función de la aplicación específica, la sección resistente del fleje debe estar unívocamente definida.

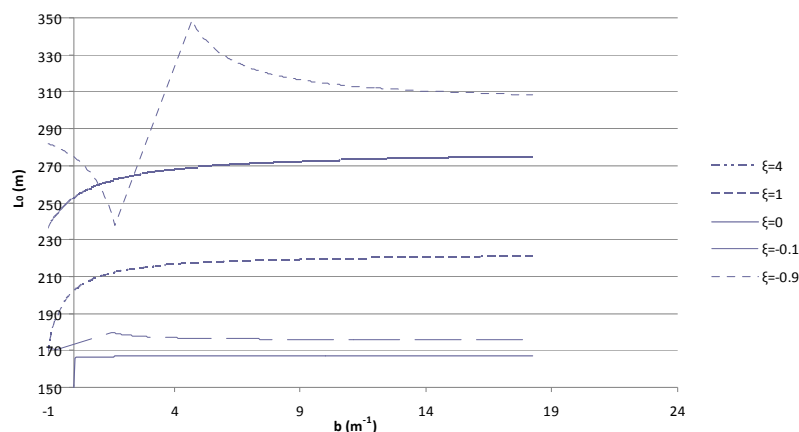
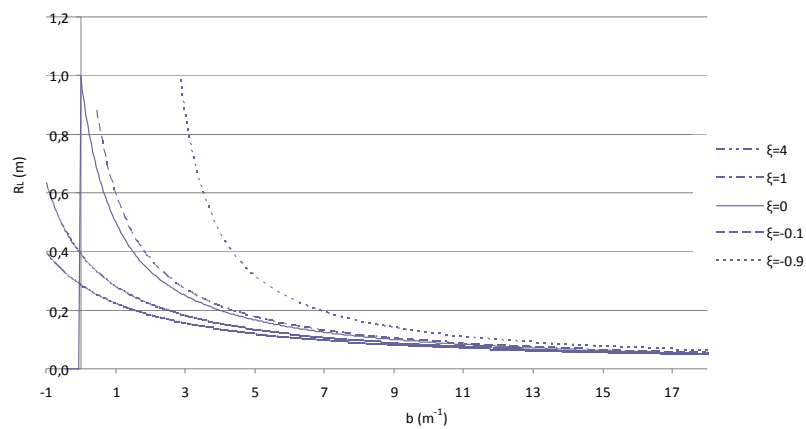


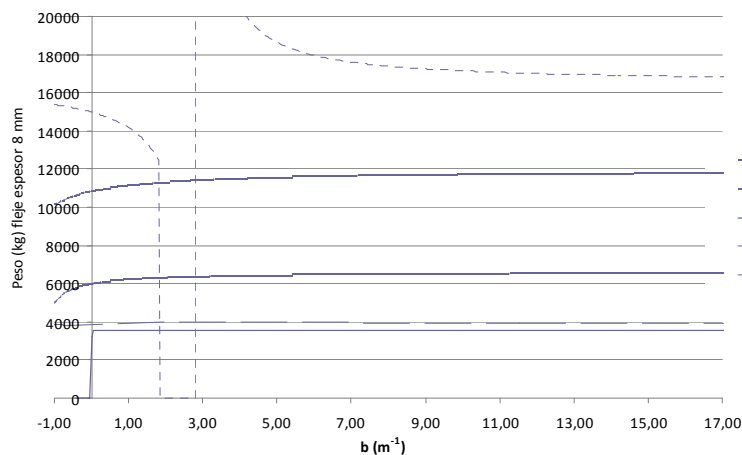
Figura 59. Relación entre parámetros de diseño b , L_0 y ξ .

Para lograr un aumento de la longitud libre con par creciente, lo que equivale a una disminución de la pendiente en la curva par - ángulo girado, la rigidez a flexión debe aumentar a lo largo de la longitud. Tanto el espesor, altura del fleje y la rigidez a flexión, calculado con anterioridad se corresponden a la sección de longitud cero, acoplada en la carcasa. El aumento de las secciones resistentes y por tanto del peso y dimensiones del resorte, son la condición para mantener baja variabilidad de par.

A partir de los datos anteriores, el parámetro a de la clotoide puede ser calculada directamente por aplicación directa de las ecuaciones de optimización de la longitud útil del fleje. Por otra parte, para determinar unívocamente la clotoide de fabricación, queda por definir los parámetros b y L_0 .



(a)



(b)

Figura 60. Relación entre parámetros de diseño b , R_L y peso con ξ .

La Figura 59 muestra la relación entre los parámetros b , L_0 y ξ para el resorte diseñado para proporcionar baja variabilidad del par. El parámetro b debe tener un valor positivo debido a las consideraciones geométricas de montaje. Así se permite definir el parámetro ξ , el cual debe tener en cuenta el funcionamiento del resorte para pares superiores al máximo de la zona de baja variabilidad por motivos de seguridad. Para su selección, la variabilidad del par será menor cuanto menor sea el valor de ξ . Así mismo debe ser elegido de tal forma que la espiral sea fabricable en términos de máximo diámetro de inscripción. Seleccionado el parámetro ξ el resto de parámetros de diseño quedan unívocamente determinados.

En la Figura 60 se representa la variación de los parámetros radio del árbol y peso del fleje con el ancho del fleje del resorte y la variación de la rigidez a flexión con la longitud. Dichas gráficas permiten observar los menores pesos del fleje y dimensiones del árbol con alta variación de la rigidez a flexión. Se observan por tanto las ventajas evidentes, respecto a la densidad de energía, de altos valores de variación de la rigidez a flexión con la longitud.

Aunque todos los análisis anteriores se han realizado con un valor del coeficiente de variación de la rigidez a flexión entre cero y uno, es posible diseñar resortes con $\xi > 0$ bajo ciertas consideraciones. Para el diseño con $\xi > 0$ la sección resistente será la de la sección de mínima dimensión, esto es la unión en la carcasa y no en el árbol, y por otra parte dicho parámetros sobredimensionará la sección de unión al árbol, con el fin de obtener par con la variabilidad definida a priori.

4.3.- Adimensionalización de parámetros de diseño.

Adicionalmente a la descripción de los parámetros de diseño y sus restricciones geométricas, funcionales y resistivas mostradas anteriormente, se puede realizar la adimensionalización de los parámetros de diseño. El material del árbol (que en muchos casos va a coincidir con el material del fleje al facilitarse así la fabricación) va a limitar el radio del mismo (al venir restringido por la resistencia a torsión y flexión). Este es el parámetro de referencia para el adimensionamiento. Por sencillez en el cálculo, se va a considerar una clotoide linealmente dependiente de la longitud (coeficiente independiente de la curva clotoidal cero) y se diseña bajo la hipótesis de sólido de igual resistencia.

Este análisis parte de la definición del coeficiente de adimensionalización del par, al disponer de una tensión uniforme σ_0 a lo largo de toda la longitud del fleje,

$$\sigma = \sigma_0 = \frac{M \cdot (1 + \varepsilon)}{I_0} \cdot h_0 \quad (135)$$

$$\mu = \frac{M}{E_0 \cdot I_0} = \frac{I_0 \cdot \sigma_0 / h_0 \cdot (1 + \varepsilon)}{E_0 \cdot I_0} = \frac{\sigma_0 / E_0}{h_0 \cdot (1 + \varepsilon)} \quad \mu \cdot R_L \cdot (1 + \varepsilon) = \left[\frac{\sigma_0}{E_0} \right] \cdot \left[\frac{R_L}{h_0} \right] \quad (136-137)$$

De manera análoga a la obtención de los radios de árbol y de la carcasa (*Figura 58*), se particulariza para coeficiente independiente de la clotoide cero. Se obtiene por una parte la relación entre radios de árbol y de carcasa y por otra el parámetro lineal de la clotoide b .

$$\frac{1}{R} = \mu \cdot (1 + \varepsilon) \quad \frac{R_L}{R} = \mu \cdot (1 + \varepsilon) \cdot R_L = \left[\frac{\sigma_0}{E_0} \right] \cdot \left[\frac{R_L}{h_o} \right] \quad (138)$$

$$b = -\mu \cdot (1 - \varepsilon) \cdot (1 + \xi) + \frac{1}{R_L} \quad b \cdot R_L = 1 - \mu \cdot (1 - \varepsilon) \cdot (1 + \xi) \cdot R_L = 1 - \left[\frac{\sigma_0}{E_0} \right] \cdot \left[\frac{R_L}{h_o} \right] \cdot \frac{1 - \varepsilon}{1 + \varepsilon} \cdot (1 + \xi) \quad (139)$$

Una vez adimensionalizados los parámetros geométricos se analizan los ángulos girados en los estados límites de baja variabilidad del par ($M(1+\varepsilon)$ y $M(1-\varepsilon)$) y el ángulo girado por el resorte entre ambos.

$$\Phi_1 = \frac{L_0}{R_L} + L_0 \cdot \gamma \cdot \frac{\mu \cdot (1 + \varepsilon) - \delta / 2}{b + \xi \cdot \mu \cdot (1 + \varepsilon)} = \frac{L_0}{R_L} + \frac{L_0}{R_L} \cdot \gamma \cdot R_L \cdot \frac{R_L \cdot \mu \cdot (1 + \varepsilon) - R_L \cdot \delta / 2}{R_L \cdot b + R_L \cdot \xi \cdot \mu \cdot (1 + \varepsilon)}$$

$$\gamma \cdot R_L = 1 - \frac{R_L}{R} = 1 - \left[\frac{\sigma_0}{E_0} \right] \cdot \left[\frac{R_L}{h_o} \right] \quad \delta \cdot R_L = 1 - \frac{R_L}{R} = 1 + \left[\frac{\sigma_0}{E_0} \right] \cdot \left[\frac{R_L}{h_o} \right] \quad (141-142)$$

$$\Phi_1 = \frac{L_0}{R_L} \cdot \left[1 + \left(1 - \left[\frac{\sigma_0}{E_0} \right] \cdot \left[\frac{R_L}{h_o} \right] \right) \cdot \frac{\left(\left[\frac{\sigma_0}{E_0} \right] \cdot \left[\frac{R_L}{h_o} \right] - \frac{1}{2} \cdot \left(1 + \left[\frac{\sigma_0}{E_0} \right] \cdot \left[\frac{R_L}{h_o} \right] \right) \right)}{\left(1 - \left[\frac{\sigma_0}{E_0} \right] \cdot \left[\frac{R_L}{h_o} \right] \cdot \frac{1 - \varepsilon}{1 + \varepsilon} \cdot (1 + \xi) \right) + \left(\xi \cdot \left[\frac{\sigma_0}{E_0} \right] \cdot \left[\frac{R_L}{h_o} \right] \right)} \right] = \frac{L_0}{R_L} \cdot \left[1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{\left(1 - \left[\frac{\sigma_0}{E_0} \right] \cdot \left[\frac{R_L}{h_o} \right] \right)^2}{\left(1 - \left[\frac{\sigma_0}{E_0} \right] \cdot \left[\frac{R_L}{h_o} \right] \cdot \left(\frac{1 + 2 \cdot \xi - \varepsilon}{1 + \varepsilon} \right) \right)} \right]$$

$$\Phi_2 = \frac{L_0}{R_L} + L_0 \cdot \gamma \cdot \frac{\mu \cdot (1 - \varepsilon) - \delta / 2}{b + \xi \cdot \mu \cdot (1 - \varepsilon)} \quad (143)$$

$$\Phi_2 = \frac{L_0}{R_L} \cdot \left[1 + \left(1 - \left[\frac{\sigma_0}{E_0} \right] \cdot \left[\frac{R_L}{h_o} \right] \right) \cdot \frac{\left(\left[\frac{\sigma_0}{E_0} \right] \cdot \left[\frac{R_L}{h_o} \right] \cdot \frac{(1 - \varepsilon)}{1 + \varepsilon} - \frac{1}{2} \cdot \left(1 + \left[\frac{\sigma_0}{E_0} \right] \cdot \left[\frac{R_L}{h_o} \right] \right) \right)}{\left(1 - \left[\frac{\sigma_0}{E_0} \right] \cdot \left[\frac{R_L}{h_o} \right] \cdot \frac{(1 - \varepsilon)}{1 + \varepsilon} \cdot (1 + \xi) \right) + \left(\xi \cdot \left[\frac{\sigma_0}{E_0} \right] \cdot \left[\frac{R_L}{h_o} \right] \cdot \frac{(1 - \varepsilon)}{1 + \varepsilon} \right)} \right] = \frac{L_0}{R_L} \cdot \left[1 + \left(1 - \left[\frac{\sigma_0}{E_0} \right] \cdot \left[\frac{R_L}{h_o} \right] \right) \cdot \frac{\left(\frac{1}{2} - \left[\frac{\sigma_0}{E_0} \right] \cdot \left[\frac{R_L}{h_o} \right] \cdot \left(\frac{(1 - \varepsilon)}{1 + \varepsilon} - \frac{1}{2} \right) \right)}{\left(1 + \left[\frac{\sigma_0}{E_0} \right] \cdot \left[\frac{R_L}{h_o} \right] \cdot \frac{(1 - \varepsilon)}{1 + \varepsilon} \right)} \right]$$

$$\Delta\Phi = 2 \cdot L_0 \cdot \gamma \cdot \mu \cdot \varepsilon \cdot \frac{b + \xi \cdot \frac{\delta}{2} - \xi \cdot a}{(b + \xi \cdot \mu)^2} \quad (144)$$

$$\Delta\Phi = 2 \cdot \frac{L_0}{R_L} \cdot (\gamma \cdot R_L) \cdot (\mu \cdot (1 + \varepsilon) \cdot R_L) \cdot \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon} \cdot \frac{b \cdot R_L + \xi \cdot \frac{\delta}{2} \cdot R_L}{(b \cdot R_L + \xi \cdot \mu \cdot R_L)^2} = 2 \cdot \frac{L_0}{R_L} \cdot \left(1 - \left[\frac{\sigma_0}{E_0} \right] \cdot \left[\frac{R_L}{h_o} \right] \right) \cdot \left(\left[\frac{\sigma_0}{E_0} \right] \cdot \left[\frac{R_L}{h_o} \right] \right) \cdot \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon} \cdot \frac{\left(1 - \left[\frac{\sigma_0}{E_0} \right] \cdot \left[\frac{R_L}{h_o} \right] \cdot \frac{1 - \varepsilon}{1 + \varepsilon} \cdot (1 + \xi) \right) + \frac{\xi}{2} \cdot \left(1 + \left[\frac{\sigma_0}{E_0} \right] \cdot \left[\frac{R_L}{h_o} \right] \right)}{\left(1 - \left[\frac{\sigma_0}{E_0} \right] \cdot \left[\frac{R_L}{h_o} \right] \cdot \frac{1 - \varepsilon}{1 + \varepsilon} \cdot (1 + \xi) + \frac{\xi}{1 + \varepsilon} \cdot \left[\frac{\sigma_0}{E_0} \right] \cdot \left[\frac{R_L}{h_o} \right] \right)^2}$$

Con la adimensionalización de las principales variables de diseño se puede optimizar este tipo de resortes. El primer paso consiste en la selección del material (relación entre la tensión y el módulo de elasticidad del mismo σ_0/E_0), a partir de los datos de partida del diseño, par y su variabilidad (M y ε). Con

dichos datos se realiza la optimización del ángulo girado $\Delta\Phi$ para los parámetros adimensionales ξ y R_L/h_0 , con restricción del coeficiente de variación de la rigidez a flexión mayor que menos uno. Una vez obtenidos los valores anteriores, se representará gráficamente la relación entre longitud y radio del árbol, L_0/R_L en función de los parámetros adimensionales ξ y R_L/h_0 . Con ambas representaciones gráficas, se deben seleccionar los parámetros de diseño para lograr el máximo de la variable cuya optimización sea buscada. En el caso de la energía almacenada consiste en optimizar $M \Delta\Phi$, respecto a los parámetros adimensionales ξ , L_0/R_L y R_L/h_0 .

4.4.- Cuantificación de la comparación entre resortes con y sin bloqueo de espiras.

Como se ha indicado en la descripción y antecedentes históricos de los resortes espirales a torsión y representado en la *Figura 61* es posible diseñar resortes con curva característica de baja variabilidad mediante el bloqueo de espiras tanto en el árbol como en la carcasa. Por tanto es necesario el análisis de las ventajas de los resortes con curva generatriz clotoideal y variación del módulo resistente con la longitud, frente a los resortes tradicionales. La principal ventaja será la longitud necesaria de resorte. Mediante equivalencia de triángulos en la *Figura 61* se puede escribir,

$$\frac{M(1+\varepsilon)}{\phi_f - \phi_p} = \frac{2M\varepsilon}{\phi_f - \phi_i} \quad (145)$$

La longitud para un resorte tradicional se podrá expresar tomando, para el mismo cambio de curvatura representado por μ , la rigidez a flexión \overline{EI} el mínimo del resorte clotoideal equivalente entre la sección inicial y final (ya que su variación es inversamente proporcional a la longitud),

$$L_{0,trad} = \frac{\overline{EI}}{M} (\phi_f - \phi_p) = \frac{1}{\mu} \frac{(1+\varepsilon)(\phi_f - \phi_i)}{2\varepsilon} \quad \overline{EI} = \min((EI)_0, (EI)_L) \quad (146-147)$$

La rigidez a flexión inicial y final tomará valores diferentes, como se ha analizado con anterioridad, en función de ξ sea mayor o menor que cero. Si $\xi < 0$ el diseño estará referenciado a la sección inicial, con lo que $(EI)_0 = M/\mu$ y por tanto $(EI)_L = (EI)_0/(1+\xi)$, mientras que si $\xi > 0$ la sección resistente para dimensionar será la final y por tanto $(EI)_L = M/\mu$ y $(EI)_0 = (EI)_L(1+\xi)$. Con lo que se garantiza en ambos casos que cualquier sección resistente del fleje esté dimensionado como mínimo para el máximo esfuerzo aplicado.

Por otra parte, para un resorte clotoideal la longitud se puede expresar,

$$L_{0,clotoideal} = \frac{(\phi_f - \phi_i)(b + \mu\xi)^2}{2\gamma\varepsilon\mu\left(b + \xi\frac{\delta}{2} - \xi a\right)} \quad (148)$$

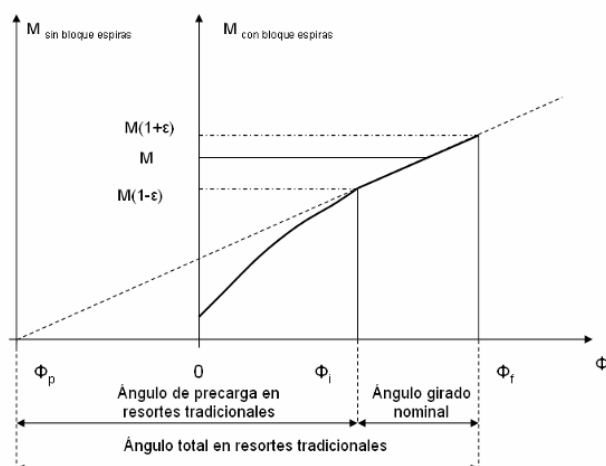


Figura 61. Resortes espirales a torsión de uso habitual y curva característica.

Por tanto la longitud para un resorte clotoidal será menor cuando se cumpla que,

$$(b + \mu\xi)^2 < \gamma(1 + \varepsilon) \left(b + \xi \frac{\delta}{2} - \xi a \right) \quad b^2 + \mu^2 \xi^2 + \left[2\mu b + \left(a - \frac{\delta}{2} \right) \gamma(1 + \varepsilon) \right] \xi - b\gamma(1 + \varepsilon) = 0$$

Tabla 4. Especificaciones del resorte con curva generatriz clotoidal.

$\Phi_f - \Phi_i$ Rad	M Nm	ε %	μ m ⁻¹	R m	Densidad kg/m ³
50	10000	5	3	0.9	2000

Tabla 5. Comparación entre resorte clotoidal y tradicional.

	Clotoidal	Tradicional
a (m ⁻¹)	-2.15	-
ξ	0	-
b (m ⁻¹)	11	-
R (m)	1	>1
R _L (m)	0.08	0.08
δ (m ⁻¹)	13.5	-
γ (m ⁻¹)	11.5	-
L ₀ (m)	166.75	1067
Δc (m ⁻¹)	3	0.495
h (m)	0.008	0.049
EI(Nm ²)	3333	3333
Peso (kg)	3550	3800

La longitud requerida para un resorte clotoidal será menor que de un resorte de uso habitual con bloqueo, si se cumple

$$1 + \frac{2\mu b + \left(a - \frac{\delta}{2} \right) \gamma(1 + \varepsilon)}{b^2 + \mu^2 \xi^2} \xi > \frac{b\gamma(1 + \varepsilon)}{b^2 + \mu^2 \xi^2}$$

Esta expresión permite definir un subóptimo para dicha inecuación en el que se defina que sea mayor que cero, esto implicaría que $b < \gamma(1+\varepsilon)$.

$$R'_1 = \frac{1}{\frac{1}{0.67} - \frac{10000}{3333}} = -0.66m \quad 1 = \frac{1}{\frac{1}{0.67} - \Delta c} \rightarrow \Delta c = 0.492m^{-1}$$

Para complementar dicho análisis se plantea el ejemplo de un resorte de 10.000 Nm con una variabilidad de +/- 5% sobre un ángulo girado de 50 rad (*Tabla 4 y Tabla 5*). El resorte clotoïdal diseñado para proporcionar dicha características tendría un valor de $\mu = 3 m^{-1}$, $a = -2,15 m^{-1}$, $b = 11 m^{-1}$, $(EI)_0 = 3.333 Nm^2$ y $\xi = 0$, con una carcasa de radio 1 m y árbol de radio 0,08 m con una longitud total de 166,75 m. Mientras tanto un resorte tradicional requeriría una rigidez a flexión constante a lo largo de toda la longitud del fleje de 3.333 Nm² con una longitud de 175 m (suponiendo no contacto entre espiras y el mismo radio del árbol). Sin embargo, para el resorte tradicional, esto implicaría un radio del fleje bloqueado en la carcasa a máximo par de 0,67 m, a mínimo par dicho radio sería negativo así como el cambio de curvatura necesario. Sin embargo el máximo cambio de curvatura admisible sería de 0,492 m⁻¹ para un radio de carcasa de 1 m. Con dichos datos, el resorte tradicional requeriría una longitud de 1,067 m.

4.5.- Caso particular de curvatura de fabricación clotoïdal con curvatura en los extremos igual a la de la carcasa y el árbol.

Un caso especial de diseño es aquel en el que el fleje de fabricación tiene en sus extremos una curvatura igual a la del árbol y a la de la carcasa. Este caso tiene su importancia por la facilidad de fabricación y montaje que supone la citada restricción de diseño. Para su estudio se podría utilizar el desarrollo y formulación genérica planteada con anterioridad, pero se ha realizado un desarrollo específico, por sus peculiaridades. Se comienza bajo la hipótesis de un fleje clotoïdal en el que la variación de la rigidez a flexión se debe únicamente a la inercia (módulo de elasticidad constante),

$$C_0 = a + b \cdot l/L_0 = C_0(l) \quad (149)$$

$$C_0(0) = a = \frac{1}{R} \quad C_0(L_0) = a + b \cdot L_0 = \frac{1}{R_L} \quad (150-151)$$

El ángulo total girado por el resorte sin carga φ_0 puede ser calculado a través de la integral de la curvatura del resorte sin carga a lo largo de toda la longitud L_0 , que puede expresarse en función de los parámetros adimensionales de los radios γ y δ . Las ecuaciones obtenidas se expresan en función de n_0 que es el número de espiras del resorte sin carga.

$$\varphi_0 = \int_0^{L_0} d\varphi = \int_0^{L_0} C_0 dl = \frac{L_0}{R} + \frac{\gamma}{2} \cdot L_0 = \frac{L_0}{R} \cdot \left(1 + \frac{R}{2} \cdot \gamma\right) = 2 \cdot \pi \cdot n_0 \quad (152)$$

Las curvaturas al aplicar par podrán obtenerse al sumar sobre la curvatura existente la generada por el par aplicado entre la rigidez a flexión. Si se define la longitud libre de espiras con valor L , se tiene que la longitud de espiras bloqueadas es $L_0 - L$,

$$C = C_0 + \frac{M}{E \cdot I} = \left(\frac{1}{R} + \mu \right) + (\gamma + \xi \cdot \mu) \cdot \frac{l}{L_0} \quad (153)$$

La relación entre las longitudes bloqueadas es obtenida al imponer que en el bloqueo en la carcasa, la curvatura del fleje montado será $1/R$, y que en el árbol cuando exista bloqueo las curvaturas serán iguales a $1/R_L$. La relación entre la longitud bloqueada y el radio del árbol permitirá obtener el ángulo φ^* girado por este,

$$\begin{aligned} C(l) &= \frac{1}{R_L} = \left(\frac{1}{R} + \mu \right) + (\gamma + \xi \cdot \mu) \cdot \frac{L}{L_0} & C(0) &= \frac{1}{R} + \mu \\ \frac{L}{L_0} &= \frac{\gamma - \mu}{\gamma + \xi \cdot \mu} & \frac{L_0 - L}{L_0} &= \frac{\mu \cdot (1 + \xi)}{\gamma + \xi \cdot \mu} \end{aligned} \quad (154-155)$$

$$\varphi^* = \frac{L_0 - L}{R_L} = \frac{L_0}{R_L} \cdot \frac{\mu \cdot (1 + \xi)}{\gamma + \xi \cdot \mu} \quad (156)$$

De manera analoga al calculo del ángulo girado por las espiras con la curvatura inicial, se realiza el cálculo con la carga aplicada,

$$\varphi = \int_0^L d\varphi = \int_0^L C dl = \left(\frac{1}{R} + \mu \right) \cdot L + (\gamma + \xi \cdot \mu) \cdot \frac{L^2}{2 \cdot L_0} = \left(\frac{1}{R} + \mu \right) \cdot L + \frac{L}{2} \cdot (\gamma - \mu) \quad (157)$$

Con el desglose mostrado de ángulos girados, el ángulo total girado por el resorte es la suma de todos ellos menos el inicial del fleje sin par aplicado.

$$\Phi = \varphi + \varphi^* - \varphi_0 \quad (158)$$

$$\begin{aligned} \Phi &= \left(\frac{1}{R} + \frac{\gamma}{2} + \frac{\mu}{2} \right) \cdot L_0 \cdot \frac{\gamma - \mu}{\gamma + \xi \mu} + \frac{L_0}{R_L} \cdot \frac{\mu \cdot (1 + \xi)}{\gamma + \xi \mu} - \frac{L_0}{R} \cdot \left(1 + \frac{R}{2} \cdot \gamma \right) = \frac{\mu \cdot L_0}{\gamma + \xi \mu} \cdot \left[\gamma(1 + \xi) - \frac{1}{2}(\mu + \xi \cdot \gamma) \right] \\ \Phi &= \frac{\mu \cdot L_0}{\gamma + \xi \mu} \cdot \left[\gamma - \frac{\mu}{2} + \xi \cdot \frac{\gamma}{2} \right] \end{aligned} \quad (159)$$

Todas las familias de curvas par – ángulo girado anteriores van a tener en común que parten del origen de coordenadas, esto es en ausencia de par, el ángulo girado será cero, lo que resulta evidente. Sin embargo sólo unas familias concretas de curvas, aquellas en las que el coeficiente de variación de la rigidez a flexión a lo largo de la longitud sea negativo, va a disponer de una rama asintótica (con valor límite del parámetro de adimensionalización del par $\mu = -\gamma/\xi$) en un determinado rango de funcionamiento.

4.6.- Análisis de tensiones en el fleje. Sólido de igual resistencia.

Para el análisis de tensiones, es necesario distinguir claramente dos situaciones funcionales distintas, las espiras bloqueadas (ya sea en el árbol o en la carcasa) y las espiras libres. En la zona de espiras bloqueadas la tensión se produce al obligar a una determinada sección del fleje a mantener una curvatura fija distinta de la de fabricación (en concreto la del árbol o la de la carcasa). Mientras tanto, en la zona de espiras libres la tensión se produce por efecto del par aplicado, generando un cambio de curvatura que depende, tanto de dicho par como de la rigidez a flexión de la sección. Sin embargo, en ambos casos, el escenario más crítico respecto a la tensión se produce para la curvatura generada por el máximo par (C_l con el par $M(l+\varepsilon)$ en la nomenclatura empleada hasta el momento). El valor concreto de las tensiones alcanzadas dependerá del punto de longitud del fleje, si está o no en zona de bloqueo.

Con todo ello, para la longitud de bloqueo en el árbol, es decir aquellos puntos que se encuentre entre las longitudes L_0-R_L $\theta_l < l < L_0$ y un par $M'(l)$ que es el que obliga al cambio de curvatura prefijado, se puede plantear el siguiente análisis de tensiones,

$$C_1(l) = \frac{1}{R_L} \quad C_0(l) = a + b \cdot \frac{l}{L_0} \quad (160-161)$$

$$\frac{M'(l)}{E \cdot I(l)} = C_1(l) - C_0(l) \quad (162)$$

$$\sigma(l) = \frac{M'(l) \cdot h(l)}{I(l)} = h(l) \cdot \left[\frac{1}{R_L} - \left(a + b \cdot \frac{l}{L_0} \right) \right] \cdot E(l) \quad (163)$$

Mientras que si la espira no está bloqueada, el par soportado será el obtenido en las ecuaciones,

$$\frac{M \cdot (1+\varepsilon)}{E \cdot I(l)} = \mu \cdot \left(1 + \xi \cdot \frac{l}{L_0} \right) \cdot (1+\varepsilon) \quad (164)$$

$$\sigma(l) = h(l) \cdot E(l) \cdot \mu \cdot (1+\varepsilon) \cdot \left(1 + \xi \cdot \frac{l}{L_0} \right) \quad (165)$$

En principio la tensión máxima, que no debe superar la admisible del material $\sigma^*(l)$, se produce en el punto con longitud L_0-R_L θ_l , punto de transición entre el bloqueo en el árbol y las espiras libre. Dicho punto crítico de diseño va a depender de los valores geométricos y del material del fleje; espesor de la espira $h(l)$, inercia $I(l)$ y módulo de elasticidad del material $E(l)$. En este punto del análisis se puede imponer que la máxima tensión que soporte el fleje en la zona de espiras libres sea la tensión máxima del material. Esta optimización de diseño consiste en diseñar bajo hipótesis de sólido de igual resistencia en la zona de espiras libres.

$$\sigma(l) = h(l) \cdot E(l) \cdot \mu \cdot (1 + \varepsilon) \cdot \left(1 + \xi \cdot \frac{l}{L_0}\right) = \sigma^*(l) \quad 0 \leq l \leq L_0 - R_L \cdot \theta_1 \quad (166)$$

La fabricación de resortes de igual resistencia, se realizaría en principio más fácilmente empleando un material de propiedades constantes y variando a lo largo de la longitud de la sección resistente. Se analiza la sección rectangular de espesor $h(l)$ y altura $e(l)$. Los materiales compuestos ofrecen la posibilidad de fabricar resortes con rigidez a flexión variable, y por tanto más adaptables a criterios de diseño. Por razones prácticas de formulación se analizarán los resortes con materiales de características invariables a lo largo de su longitud, con perfil de igual resistencia en el intervalo de espiras libres. Así el cálculo de tensiones obtenido se expresa de la siguiente forma:

$$E(l) = E_0 \quad \sigma^*(l) = \sigma_0 \quad I(l) = I_0 \left/ 1 + \xi \cdot \frac{l}{L_0} \right.$$

$$E_0 \cdot h(l) \cdot \mu \cdot (1 + \varepsilon) \cdot \left(1 + \xi \cdot \frac{l}{L_0}\right) = \sigma_0$$

Al suponer, por ejemplo, espesor variable inversamente proporcional con la longitud del fleje se observa que, para mantener hipótesis de sólido de igual resistencia, se debe hacer variar la altura de manera proporcional al cuadrado de la longitud,

$$h(l) = \frac{h_0}{1 + \xi \cdot \frac{l}{L_0}} \quad h_0 = \frac{\sigma_0 / E_0}{\mu \cdot (1 + \varepsilon)} \quad (167-168)$$

$$\frac{I_0}{1 + \xi \cdot \frac{l}{L_0}} = \frac{2}{3} \cdot e(l) \cdot h(l)^3 = \frac{2}{3} \cdot h_0^3 \cdot \frac{e(l)}{\left(1 + \xi \cdot \frac{l}{L_0}\right)^3}$$

$$e(l) = e_0 \cdot \left(1 + \xi \cdot \frac{l}{L_0}\right)^2 \quad e_0 = \frac{3}{2} \cdot \frac{I_0}{h_0^3} \quad (169-170)$$

$$S(l) = 2 \cdot h(l) \cdot e(l) \quad S(l) = s_0 \cdot \left(1 + \xi \cdot \frac{l}{L_0}\right) \quad (171-172)$$

Las espiras bloqueadas tienen siempre tensiones menores que las planteadas anteriormente, al estar limitada su curvatura por el bloqueo. Sin embargo la expresión anterior es la solución evidente del dimensionamiento de la sección resistente y su variación a lo largo de la longitud del fleje, sin embargo, no es la única posible. Se definen los coeficientes α y β de variación de la altura y del espesor de la sección resistente, a lo largo de la longitud del fleje;

$$e(l) = e_0 \cdot \left(1 + \xi \cdot \frac{l}{L_0}\right)^\alpha \quad h(l) = h_0 \cdot \left(1 + \xi \cdot \frac{l}{L_0}\right)^\beta \quad (173-174)$$

$$\frac{h(l)}{I(l)} = \frac{h_0 \cdot \left(1 + \xi \cdot \frac{l}{L_0}\right)^\beta}{\frac{2}{3} \cdot e_0 \cdot h_0^3 \cdot \left(1 + \xi \cdot \frac{l}{L_0}\right)^{\alpha+3\beta}} = \frac{h_0}{I_0} \cdot \frac{1}{\left(1 + \xi \cdot \frac{l}{L_0}\right)^{\alpha+2\beta}} \quad (175)$$

En dicha expresión se puede obtener perfil de igual resistencia a lo largo de toda la longitud del resorte, mediante la restricción de trabajo en la curva $\alpha + 2\beta = 0$. Dicha recta de soluciones, va desde la evidente de $\alpha = 2$ y $\beta = -1$ hasta la trivial de $\alpha = \beta = 0$ de un resorte de sección constante. Bajo estas circunstancias, se realiza un análisis de las diferentes alternativas de diseño de la sección resistente en función de los parámetros α y β y la relación teórica entre ellos para la sección rectangular $3\alpha = \beta + 1$.

$$\begin{aligned} h(l) &= h_0 \left(1 + \xi \cdot \frac{l}{L}\right)^\alpha & I(l) &= \frac{2}{3} \cdot h^3(l) \cdot e_0(l) = I_0 \left(1 + \xi \cdot \frac{l}{L}\right) \\ e(l) &= e_0 \left(1 + \xi \cdot \frac{l}{L}\right)^\beta \end{aligned}$$

Las alternativas de diseño que se plantean, tanto para condiciones de material homogéneo como material variable a lo largo de la longitud, se muestran en la *Tabla 6*. Se ha empleado la siguiente nomenclatura, semi-espesor del fleje $h(l)$ (ya sea en la posición inicial o carcasa $h(0) = h_0$ o en la final o árbol $h(L) = h_L$), altura de cada sección $e(l)$ (tanto en carcasa $e(0) = e_0$ como en árbol $e(L) = e_L$), módulo de elasticidad del material (en carcasa $E(0) = E_0$ y árbol $E(L) = E_L$) y tensión máxima (en carcasa $\sigma(0) = \sigma_0$ y árbol $\sigma(L) = \sigma_L$).

Tabla 6. Alternativas de diseño con sección y material variable.

Material	Sección espira	$h(l)$	$e(l)$	$I(l)$	$E(l)$	$\sigma(l)$
Variable	Constante	h_0	e_0	$\frac{2}{3} \cdot h_0^3 \cdot e_0$	$E_0 \left(1 + \xi \cdot \frac{l}{L}\right)$	σ_0
		h_0	e_0	$\frac{2}{3} \cdot h_0^3 \cdot e_0$	$E_0 \left(1 + \xi \cdot \frac{l}{L}\right)$	<i>Variable</i>
Constante	Variable	$h_0 \cdot \left(1 + \xi \cdot \frac{l}{L}\right)^\alpha$	$e_0 \left(1 + \xi \cdot \frac{l}{L}\right)^\beta$	$I_0 \left(1 + \xi \cdot \frac{l}{L}\right)$	E_0	σ_0
		$h_0 \cdot \left(1 + \xi \cdot \frac{l}{L}\right)^\alpha$	$e_0 \left(1 + \xi \cdot \frac{l}{L}\right)^\beta$	$I_0 \left(1 + \xi \cdot \frac{l}{L}\right)$	E_0	σ_0

Conjuntamente con las ecuaciones anteriores se puede realizar el diseño con la condición adicional de sólido de igual resistencia a flexión, que para material de características constantes equivale a la siguiente expresión,

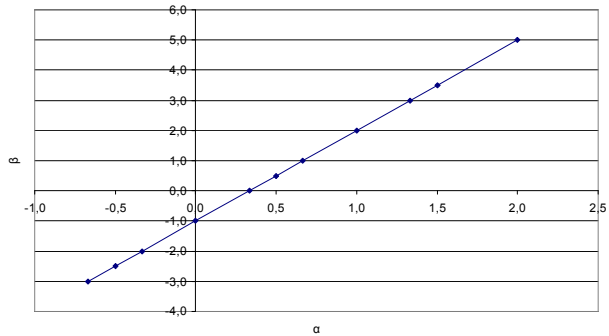
$$\frac{M \cdot (1 + \varepsilon) \cdot h(l)}{I(l)} = cte \quad h^2(l) \cdot e(l) = cte$$

Mientras que si el material del fleje tiene características variables se debe utilizar la expresión general de tensión a lo largo de la longitud, con par constante como única carga exterior.

Con la restricción anterior se pueden seleccionar espesor y altura a lo largo de la longitud, en función de la variación de la inercia ξ . Esto implica la existencia de un amplio margen para definir la geometría de la espira α , β y ξ .

Tabla 7. Relación entre parámetros α y β .

		α	β
Si $\xi > 0$	$h(l)$ creciente	$-2/3$	-3
	$e(l)$ decreciente		
Si $-1 < \xi < 0$	$h(l)$ decreciente	$-1/2$	-2.5
	$e(l)$ creciente		
Espesor constante $h(l)=h_0$		0	-1
Anchura constante $e(l)=e_0$		$1/3$	0
Si $\xi > 0$	$h(l)$ decreciente	$1/2$	$1/2$
	$e(l)$ creciente		
Si $-1 < \xi < 0$	$h(l)$ creciente	1	2
	$e(l)$ decreciente	$4/3$	3
		$3/2$	3.5



Conjuntamente con estos valores otro parámetro importante, y de interés especial para los resortes con espesor variable, es el valor medio del espesor de la espira h_m , obtenido en función del espesor inicial los valores de la variación de inercia y del espesor, a lo largo de la longitud del fleje.

$$h_m = \frac{\int_0^L h(l) \cdot dl}{L} = \frac{1}{L} \cdot \int_0^L h_0 \cdot \left(1 + \xi \cdot \frac{l}{L}\right)^\alpha \cdot dl = \frac{h_0}{L} \cdot \frac{L}{\xi} \cdot \left[\frac{\left(1 + \xi \cdot \frac{l}{L}\right)^{1+\alpha}}{1+\alpha} \right]_0^L = \frac{h_0}{\xi} \cdot \frac{(1+\xi)^{1+\alpha} - 1}{1+\alpha} \quad (176)$$

En el caso concreto del coeficiente alfa uno ($\alpha = 1$), el espesor medio puede expresarse a través de una ecuación logarítmica de la inercia,

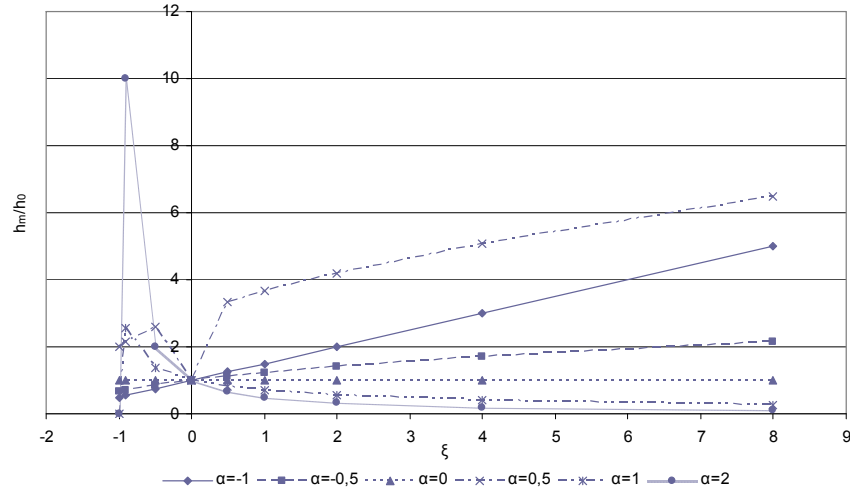
$$h_m(\alpha = 1) = \frac{1}{L} \cdot \int_0^L h_0 \cdot \left(1 + \xi \cdot \frac{l}{L}\right) \cdot dl = \frac{h_0}{L} \cdot \frac{L}{\xi} \cdot \left[\ln\left(1 + \xi \cdot \frac{l}{L}\right) \right]_0^L = h_0 \cdot \frac{\ln(1+\xi)}{\xi} \quad (177)$$

$$\frac{h_m}{h_0} = \frac{(1+\xi)^{1+\alpha} - 1}{(1+\alpha) \cdot \xi} \quad (178)$$

El análisis de la Figura 62 permite conocer las relaciones entre los parámetros de diseño: espesor, inercia y relación espesor medio e inicial. Alfa es positivo, para un coeficiente de variación de inercia positivo, mientras que alfa es negativo cuando la variación de inercia se encuentra entre valores entre menos uno y cero.

Tabla 8. Relación entre parámetros α , h_m/h_0 y ξ .

α	ξ	h_m/h_0
$\alpha < 1$	$\xi = -1$	$1/(1-\alpha)$
$\alpha > 1$	$\xi = -1$	∞
	$\xi = 0$	1


 Figura 62. Relación entre h_m/h_0 y ξ .

Desde un punto de vista de fabricabilidad y homogeneidad del resorte, parece lógico definir una variación progresiva de la anchura a lo largo de la longitud del fleje. Se considera, por condicionantes prácticos, que la diferencia máxima entre ambos extremos del fleje no debe ser ni menor que 0.1 ni mayor que 10. Dicha correlación puede definirse también para el coeficiente beta.

$$\frac{h_0}{10} < h_L = h(L) = \frac{h_0}{(1+\xi)^\alpha} < 10 \cdot h_0 \quad (179)$$

$$\frac{e_0}{10} < e_L = e(L) = e_0 \cdot (1+\xi)^\beta < 10 \cdot e_0 \quad (180)$$

 Tabla 9. Relación entre parámetros α , β , h_m/h_0 , ξ_{\max} y ξ_{\min} .

α	β	$0.1 < h_L/h_0 < 10$		ξ_{\min}	ξ_{\max}
-1	-4	$\frac{1}{10} < \frac{h_L}{h_0} = (1+\xi) < 10$	$0.1 < (1+\xi)^4 < 10$	-0.4	0.8
-0.5	-2.5	$\frac{1}{10} < \frac{h_L}{h_0} = (1+\xi)^{0.5} < 10$	$0.1 < (1+\xi)^{2.5} < 10$	-0.6	1.5
0	-1	$\frac{1}{10} < \frac{h_L}{h_0} = 1 < 10$	$0.1 < (1+\xi) < 10$	-0.9	9
0.5	0.5	$\frac{1}{10} < \frac{h_L}{h_0} = \frac{1}{\sqrt{(1+\xi)}} < 10$	$0.1 < \sqrt{(1+\xi)} < 10$	-0.99	99
1	2	$\frac{1}{10} < \frac{h_L}{h_0} = \frac{1}{(1+\xi)} < 10$	$0.1 < (1+\xi)^2 < 10$	-0.3	5.2
2	4	$\frac{1}{10} < \frac{h_L}{h_0} = \frac{1}{(1+\xi)^2} < 10$	$0.1 < (1+\xi)^2 < 10$	-0.7	0.8

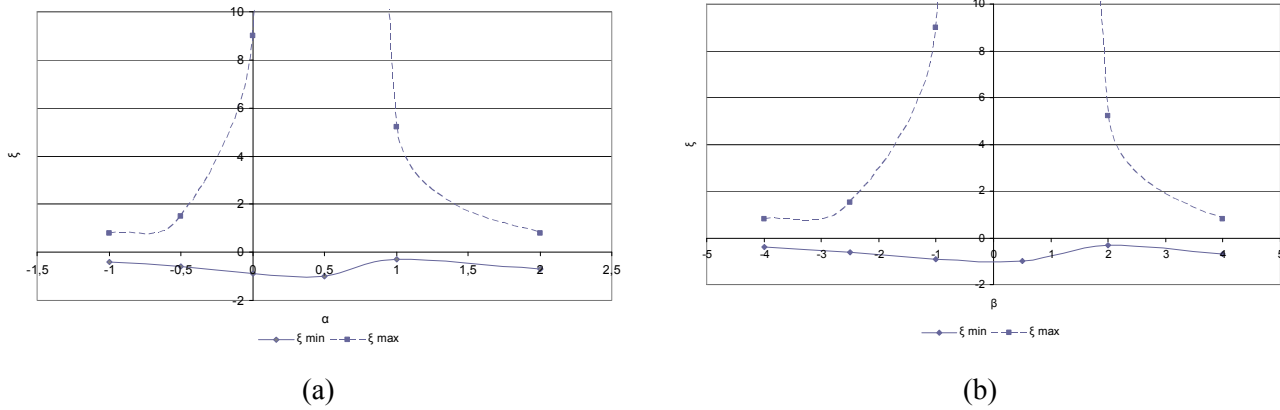


Figura 63. Relación entre α y ζ y entre β y ζ .

Con estas correlaciones límite y en función de los valores de alfa y beta, se puede delimitar los valores máximos y mínimos de variación. Dichos valores se expresan en la *Tabla 9* y *Figura 63* con los valores mínimos y máximos de ζ , respecto a alfa y beta.

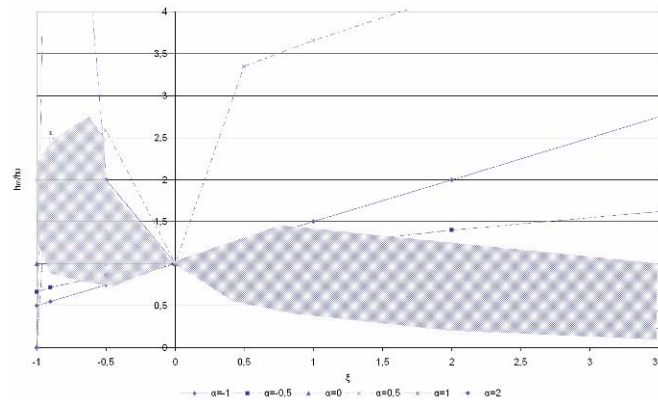


Figura 64. Zona de validez en la relación entre h_m/h_0 y ζ .

Se observa que para unos valores de alfa comprendidos entre cero y uno, los límites de variación de la inercia son muy amplios. Dichas limitaciones deben ser superpuestas a los valores de espesor medio respecto del inicial (*Figura 64*). Se obtiene la zona de diseño para los parámetros α , β y ζ de la sección resistente.

El desarrollo anterior ha permitido analizar los parámetros de variación de la sección de la espira α , β y ζ así como sus correlaciones. Se han planteado su variación a lo largo de la longitud del fleje con objeto de facilitar la fabricación y optimizar la funcionalidad del resorte.

4.7.- Condiciones de resistencia de la espira.

Una vez analizado el comportamiento general del resorte y el diseño resistivo del mismo, es importante analizar las ecuaciones desarrolladas para el par máximo de funcionamiento, al ser esta la situación más crítica de diseño. Primeramente se va a definir el número de espiras del resorte, contribución de la curvatura del resorte a lo largo de la longitud del fleje,

$$\frac{\varphi(l)}{2 \cdot \pi} = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \int_0^l C(l) dl \quad (181)$$

Para el par máximo de diseño, $M(I + \varepsilon)$, las espiras totales se expresan de la siguiente forma,

$$\Phi = \frac{1}{R_L} \cdot L - \frac{1}{2} \cdot \gamma \cdot (L - R_L \cdot \theta) = \frac{L}{R_L} - \frac{\gamma^2}{2} \cdot \frac{L}{\gamma + 2 \cdot \mu \cdot \varepsilon \cdot (1 + \xi)} = \frac{L}{R_L} \cdot \left[1 - \frac{\gamma^2 \cdot R_L}{2 \cdot (\gamma + 2 \cdot \mu \cdot \varepsilon \cdot (1 + \xi))} \right] \quad (182)$$

al sustituir la relación entre radios de carcasa y de árbol se puede transformar la ecuación anterior,

$$2 - \gamma \cdot R_L = 2 - 1 + \frac{R_L}{R} = R_L \delta$$

$$\frac{\Phi}{2 \cdot \pi} = \frac{L}{2 \cdot \pi \cdot R_L} \cdot \frac{2\gamma - \gamma^2 \cdot R_L + 4 \cdot \mu \cdot \varepsilon \cdot (1 + \xi)}{\gamma + 2 \cdot \mu \cdot \varepsilon \cdot (1 + \xi)} = \frac{L}{4 \cdot \pi \cdot R_L} \cdot \frac{\gamma \cdot \delta \cdot R_L + 4 \cdot \mu \cdot \varepsilon \cdot (1 + \xi)}{\gamma + 2 \cdot \mu \cdot \varepsilon \cdot (1 + \xi)}$$

De manera análoga se pueden analizar las espiras giradas durante el funcionamiento entre los dos valores extremos del par $M(I + \varepsilon)$ y $M(I - \varepsilon)$,

$$\frac{\Delta \Phi}{2 \cdot \pi} = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \gamma \cdot \frac{R_L \cdot \theta + R \cdot \beta}{2} = \frac{\gamma \cdot L}{4 \cdot \pi} \left[\frac{2 \cdot \mu \cdot \varepsilon \cdot (1 + \xi)}{\gamma + 2 \cdot \mu \cdot \varepsilon \cdot (1 + \xi)} + \frac{2 \cdot \mu \cdot \varepsilon}{\gamma + 2 \cdot \mu \cdot \varepsilon} \right] \quad (183)$$

$$\frac{\Delta \Phi}{2 \cdot \pi} = \frac{2 \cdot \gamma \cdot L \cdot \mu \cdot \varepsilon}{4 \cdot \pi} \cdot \frac{[2 \cdot \mu \cdot \varepsilon \cdot (1 + \xi)] \cdot [\gamma + 2 \cdot \mu \cdot \varepsilon] + [\gamma + 2 \cdot \mu \cdot \varepsilon \cdot (1 + \xi)] \cdot [2 \cdot \mu \cdot \varepsilon]}{[\gamma + 2 \cdot \mu \cdot \varepsilon \cdot (1 + \xi)] \cdot [\gamma + 2 \cdot \mu \cdot \varepsilon]}$$

$$\frac{\Delta \Phi}{2 \cdot \pi} = \frac{\gamma \cdot L \cdot \mu \cdot \varepsilon}{2 \cdot \pi} \cdot \frac{\gamma \cdot (2 + \xi) + 4 \cdot \mu \cdot \varepsilon \cdot (1 + \xi)}{[\gamma + 2 \cdot \mu \cdot \varepsilon \cdot (1 + \xi)] \cdot [\gamma + 2 \cdot \mu \cdot \varepsilon]}$$

La expresión obtenida puede ser analizada de manera más sencilla mediante la definición de ciertos parámetros adimensionales, la relación entre radios de árbol y de carcasa r , que mide la holgura o hueco existente para el bloqueo en árbol y carcasa de toda la longitud del fleje, y el parámetro que representa el par máximo de funcionamiento, ψ .

$$\Psi = 2 \cdot \mu \cdot \varepsilon \cdot \frac{1 + \xi}{\gamma} \quad r = \frac{R_L}{R} \quad (184-185)$$

$$1 - r = R_L \cdot \gamma \quad 1 + r = R_L \cdot \delta \quad R - R_L = R \cdot (1 - r) = R_L \cdot \frac{1 - r}{r}$$

Al utilizar dichas simplificaciones las formulación de espiras giradas pueden expresarse de la siguiente manera,

$$\frac{\Phi}{2 \cdot \pi} = \frac{L}{4 \cdot \pi \cdot R_L} \cdot \frac{\gamma \cdot (1+r) + 4 \cdot \mu \cdot \varepsilon \cdot (1+\xi)}{\gamma + 2 \cdot \mu \cdot \varepsilon \cdot (1+\xi)} = \frac{L}{4 \cdot \pi \cdot R_L} \cdot \frac{(1+r) + 2 \cdot \Psi}{1 + \Psi} \quad (186)$$

$$L = 2 \cdot \Phi \cdot R_L \cdot \frac{1 + \Psi}{(1+r) + 2 \cdot \Psi} \quad (187)$$

$$\begin{aligned} \frac{\Delta \Phi}{2 \cdot \pi} &= \frac{\gamma \cdot L \cdot \mu \cdot \varepsilon}{2 \cdot \pi} \cdot \frac{\gamma \cdot (2+\xi) + 4 \cdot \mu \cdot \varepsilon \cdot (1+\xi)}{[\gamma + 2 \cdot \mu \cdot \varepsilon \cdot (1+\xi)] \cdot [\gamma + 2 \cdot \mu \cdot \varepsilon]} = \frac{L}{2 \cdot \pi} \cdot \frac{\mu \cdot \varepsilon}{1 + \frac{2 \cdot \mu \cdot \varepsilon}{\gamma}} \cdot \frac{(2+\xi) + 2 \cdot \Psi}{1 + \Psi} = \frac{L \cdot \gamma}{2 \cdot \pi} \cdot \frac{2 \cdot \mu \cdot \varepsilon / \gamma}{1 + \frac{2 \cdot \mu \cdot \varepsilon}{\gamma}} \cdot \frac{(2+\xi) + 2 \cdot \Psi}{1 + \Psi} \\ \frac{\Delta \Phi}{2 \cdot \pi} &= \frac{L \cdot \gamma}{4 \cdot \pi} \cdot \frac{\Psi}{(1+\xi) + \Psi} \cdot \frac{(2+\xi) + 2 \cdot \Psi}{1 + \Psi} \\ \frac{\Phi \cdot (1-r)}{2 \cdot \pi} &\cdot \frac{\Psi}{(1+r) + 2 \cdot \Psi} \cdot \frac{(2+\xi) + 2 \cdot \Psi}{(2+\xi) + \Psi} \end{aligned} \quad (188)$$

Las condiciones de resistencia tanto de la espira como del árbol, viene dados por los diferentes estados de carga que puede soportar el resorte. Los tipos de cargas y consideraciones a tener en cuenta en el análisis resistivo son los siguientes,

- Resistencia a torsión del árbol, va a condicionar el radio mínimo del árbol en función del par aplicado y del material de fabricación.
- Resistencia a flexión y tracción de las espiras, la cual dependerá tanto del material como de su geometría. Podrá tener importancia la unión interior y exterior del fleje.
- Holgura entre espiras, va a condicionar el radio mínimo de la carcasa. Puede producir efectos de rozamiento excesivo entre espiras o contacto puntuales con fenómenos de adherencia – deslizamiento, que puede generar esfuerzos puntuales que impidan el correcto proceso de carga y descarga.
- Fatiga, los efectos de fatiga deben ser tenidos en cuenta en la selección del material del fleje por los posibles fallos en función de los ciclos en procesos consecutivos de carga y descarga.

Así los estados de carga van a condicionar el diseño mecánico del resorte y sus uniones interior y exterior. Se analizan pormenorizadamente los criterios anteriores,

4.7.1.- Resistencia a torsión del árbol.

Se selecciona un material para el árbol que sea resistente y poco deformable; aplicando al diseño un coeficiente de seguridad k . Mediante las fórmulas de resistencia a torsión se puede obtener un valor mínimo para el radio del árbol:

$$k \cdot M \leq \int_0^{R_L} \left(\frac{\tau_{adm}}{R_L} \cdot r \right) \cdot r \cdot 2 \cdot \pi \cdot r \cdot dr = \frac{\pi}{2} \cdot \tau_{adm} \cdot R_L^3 \quad (189)$$

$$R_L \geq \sqrt[3]{\frac{2 \cdot k \cdot M}{\pi \cdot \tau_{adm}}} \quad (190)$$

El radio del árbol es el único de los parámetros que va a depender exclusivamente de las condiciones de carga exteriores y del material. El resto de los parámetros van a depender de la variación a lo largo de la longitud del fleje de las variables de diseño principalmente espesor, anchura, módulo de elasticidad y resistencia del material.

4.7.2.- Resistencia de la espira en la unión al árbol y a la carcasa.

La unión entre el fleje y la carcasa y el árbol debe ser diseñada para soportar el par máximo de funcionamiento. Esta formulación va a suponer la continuidad entre ambos medios. Si no fuese así y su fabricación fuese independiente el par máximo deberá ser soportado por medio de unión entre ambos (ya sea mecánica, soldadura, adhesivas...)

$$k \cdot \frac{M \cdot (1 + \varepsilon)}{R_L} \leq \sigma_0 \cdot e(l) \cdot h(l) = \sigma_0 \cdot e_0 \cdot h_0 \cdot (1 + \xi)^{\beta - \alpha}$$

En dicha formulación se ha supuesto un coeficiente de seguridad igual a uno por tener un límite de rotura σ_R mucho mayor que el límite elástico del material σ_0 .

$$M \cdot (1 + \varepsilon) = \sigma_0 \cdot e_0 \cdot h_0 \cdot (1 + \xi)^{2\alpha - 1} R_L \quad (191)$$

De manera análoga se puede realizar el cálculo para la unión entre el resorte y la carcasa.

$$\frac{M \cdot (1 + \varepsilon)}{R} \leq \sigma_0 \cdot e_0 \cdot h_0 \quad M \cdot (1 + \varepsilon) = \sigma_0 \cdot e_0 \cdot h_0 \cdot \frac{R_L}{r} \quad (192)$$

4.7.3.- Resistencia a flexión de la espira.

El par aplicado sobre el árbol va a generar sobre cada una de las espiras un esfuerzo a flexión. Para una longitud genérica l' el cambio de curvatura entre la clotoide deformada a par nominal y la de fabricación,

$$C_L(l') - C_0(l') = \mu \cdot (1 + \varepsilon) \cdot \left(1 + \xi \cdot \frac{l'}{L} \right) = \frac{M \cdot (1 + \varepsilon)}{E_0 \cdot I_0} \cdot \left(1 + \xi \cdot \frac{l'}{L} \right)$$

Para cada longitud genérica se puede aplicar la ecuación de resistencia de la citada sección, con una tensión igual al límite elástico del material de fabricación del fleje,

$$\frac{M \cdot (1 + \varepsilon) \cdot h(l')}{I(l')} \leq \sigma_0$$

Las dos ecuaciones anteriores posibilitan localizar la posición de la sección resistente con el límite elástico del material.

$$M \cdot (1 + \varepsilon) = \frac{2}{3} \cdot \sigma_0 \cdot e_0 \cdot h_0^2 \cdot \left(1 + \xi \cdot \frac{l'}{L}\right)^{\beta-2\alpha} = \frac{2}{3} \cdot \sigma_0 \cdot e_0 \cdot h_0^2 \cdot \left(1 + \xi \cdot \frac{l'}{L}\right)^{\alpha-1} \quad (193)$$

Dicha expresión tendrá diferente comportamiento si el parámetro de variación de la rigidez a flexión a lo largo de la longitud del fleje, tiene valor positivo o negativo. Si es negativo la longitud crítica con máxima tensión será la unión con la carcasa, la expresión de la resistencia en la espira se puede simplificar de la siguiente forma,

$$M \cdot (1 + \varepsilon) = \sigma_0 \cdot e_0 \cdot h_0 \cdot \frac{2}{3} \cdot h_0$$

Sin embargo, si el coeficiente de variación de la rigidez a flexión es creciente con la longitud, la longitud con máxima tensión, se obtiene mediante la siguiente expresión, que va a permitir calcular el par máximo de funcionamiento en función de los parámetros de diseño,

$$l' = L - R_L \cdot \theta = \frac{L}{1 + \psi} \quad (194)$$

$$M \cdot (1 + \varepsilon) = \sigma_0 \cdot e_0 \cdot h_0 \cdot \frac{2}{3} \cdot h_0 \cdot \left(1 + \frac{\xi}{1 + \psi}\right)^{\alpha-1} \quad (195)$$

Se dispone así de varias ecuaciones resistentes y se observa que la condición limitativa es la de flexión de espiras.

$$\frac{2}{3} \cdot h_0 \cdot \left(1 + \frac{\xi}{1 + \psi}\right)^{\alpha-1} \ll R_L \cdot (1 + \xi)^{2\alpha-1} < \frac{R_L}{r} = R$$

Un caso particular es el diseño bajo perfil de igual resistencia, coeficiente alfa igual a la unidad. Las expresiones quedan simplificadas observándose que la tercera de ellas, que corresponde a la flexión de las espiras, es la más restrictiva.

$$M \cdot (1 + \varepsilon) = \sigma_0 \cdot e_0 \cdot h_0 \cdot (1 + \xi) \cdot R_L$$

$$M \cdot (1 + \varepsilon) = \sigma_0 \cdot e_0 \cdot h_0 \cdot R = \sigma_0 \cdot e_0 \cdot h_0 \cdot \frac{R_L}{r}$$

$$M \cdot (1 + \varepsilon) = \sigma_0 \cdot e_0 \cdot h_0 \cdot \frac{2}{3} \cdot h_0$$

4.7.4.- Condición de holgura entre espiras.

Una incorrecta distancia entre espiras (por escasa), puede ocasionar el rozamiento entre ellas que produciría picos de par y el enclavamiento de espiras. Por excesiva holgura puede ocasionar una disminución de la longitud útil del resorte, con la disminución del ángulo girado y la deformación de la curva par – ángulo girado respecto a la especificada. Para dicho análisis, el número de vueltas totales de la espiral cargada se puede expresar de la siguiente forma:

$$\frac{\Phi}{2 \cdot \pi} = \frac{L}{4 \cdot \pi \cdot R_L} \cdot \frac{(1+r) + 2 \cdot \Psi}{1 + \Psi}$$

Para que la espiral quede encuadrada entre los radios del árbol y la carcasa se debe cumplir que la relación sea menor que la mayoración del radio del árbol con la correlación de radios y también mayor que las vueltas del resorte dadas multiplicadas por el espesor total de la espira (se empleará el valor medio del espesor del fleje para dar más generalidad al cálculo)

$$\frac{\Phi}{2 \cdot \pi} \cdot 2 \cdot h_m < R - R_L < R_L \cdot \frac{1+r}{r} \quad (196)$$

En la correlación anterior, puede ser sustituido el valor del ángulo girado, obteniéndose un valor limite de la longitud para el resto de los parámetros de diseño,

$$L < \frac{1-r}{r} \cdot \frac{R_L}{h_m} \cdot 2 \cdot \pi \cdot R_L \cdot \frac{1+\Psi}{(1+r) + 2 \cdot \Psi} \quad (197)$$

Adicionalmente al planteamiento anterior y como comprobación se puede plantear que el área frontal de espiras sea siempre menor que la corona circular entre el árbol y la carcasa:

$$\int_0^L 2 \cdot h(l) \cdot dl = 2 \cdot L \cdot h_m < \pi \cdot (R^2 - R_L^2) = \pi \cdot R_L^2 \cdot \frac{1-r^2}{r^2}$$

con la expresión anterior se obtiene otro valor máximo para la longitud máxima del fleje:

$$L < \frac{1-r^2}{4 \cdot r^2} \cdot \frac{R_L}{h_m} \cdot 2 \cdot \pi \cdot R_L \quad (198)$$

Se dispone así de dos ecuaciones que limitan la longitud del fleje. Se hace necesaria la comparación entre ambas expresiones. Se deberá seleccionar la más restrictiva de ambas, siempre y cuando no exista otra especificación o condicionantes.

$$\frac{1-r}{4 \cdot r} < \frac{1+\Psi}{(1+r) + 2 \cdot \Psi}$$

Capítulo 5.- EJEMPLOS DE DISEÑO CON MODELO Y METODOLOGÍA PROPUESTOS.

El procedimiento de diseño planteado en capítulos anteriores permite realizar el diseño de dos resortes fabricados ambos en materiales compuestos (aunque con diferentes propiedades mecánicas). Uno de ellos de par de alta variabilidad (par máximo de 450 Nm) con objeto de ocupar el mínimo espacio posible mientras que el otro dispondrá de baja variabilidad en su funcionamiento definido a priori (5% sobre 5250 Nm como valor nominal).

5.1.- Diseño de resorte espiral a torsión de alta variabilidad de par.

Se aplica el procedimiento para el diseño de un resorte de par de alta variabilidad máximo de 450 Nm desde el estado inicial sin par aplicado y ángulo máximo girado de 500 grados aproximadamente. El resorte debe disponer de las mínimas dimensiones posibles, para aplicaciones con mínimo espacio disponible. Por dicho motivo, la espiral será de Arquímedes cuando el resorte se encuentre bloqueado en el árbol a máximo par, en este caso con desbloqueo y bloqueo de espiras manteniéndose constante la rigidez a flexión de la sección resistente. Disponer de un resorte con toda su longitud bloqueada en el árbol a par máximo, estando bloqueado en la carcasa sin par aplicado, tiene gran facilidad de fabricación y montaje para aplicaciones con mínimo espacio. Sin embargo tiene por inconveniente que siempre no tiene par inicial, el par inicial es siempre cero. Si en alguna aplicación se necesitase se tendría que realizar el diseño de algún dispositivo de tope. Otra característica es que el incremento de curvatura no es constante, por lo que para la optimización del peso puede ser necesario variar el espesor del fleje.

Existe la posibilidad de seleccionar diferentes materiales y cambios de curvatura (Tabla 10). Se decide emplear fibra de vidrio unidireccional con resina epoxy, tensión admisible a tracción $2,37 \cdot 10^9$ Pa, tensión máxima admisible $1,18 \cdot 10^9$ Pa, densidad 2.000 kg/m^3 y módulo de elasticidad $3,30 \cdot 10^{10}$ Pa y cambio de curvatura constante a lo largo de la longitud del fleje.

Tabla 10. Opciones de diseño en la selección del material de fabricación del fleje del resorte.

Material	Propiedades mecánicas	Cambio de curvatura	Altura	Anchura
Acero	$\sigma = 3,7 \cdot 10^8 \text{ Pa}$ $E = 2,1 \cdot 10^{11} \text{ Pa}$	$1,25 \text{ m}^{-1}$	83,7 mm	2,82 mm
		$2,50 \text{ m}^{-1}$	172,6 mm	1,41 mm
Fibra vidrio - epoxy	$\sigma = 1,18 \cdot 10^9 \text{ Pa}$ $E = 3,30 \cdot 10^{10} \text{ Pa}$	$1,25 \text{ m}^{-1}$	54,0 mm	1,88 mm
		$2,50 \text{ m}^{-1}$	27,0 mm	4,03 mm

Una vez conocido el material y el cambio de curvatura de $13,36 \text{ m}^{-1}$ se procede a dimensionar la sección resistente para el par máximo de funcionamiento. Con el material seleccionado, la inercia necesaria de la sección resistente es de $1,02 \cdot 10^{-9} \text{ m}^4$, que se alcanza con un espesor de fleje de 5,34 mm y una altura de 5,4 cm.

Conjuntamente con los cálculos resistivos, es necesario definir los valores mínimos de los radios de árbol y carcasa. Con el par máximo un árbol con radio de 0,031 m esta sobredimensionado resistentemente. Por otra parte, para el cálculo del radio de la carcasa, aplicando criterios relativos a la limitación del contacto de espiras se obtiene un valor 0,080 m.

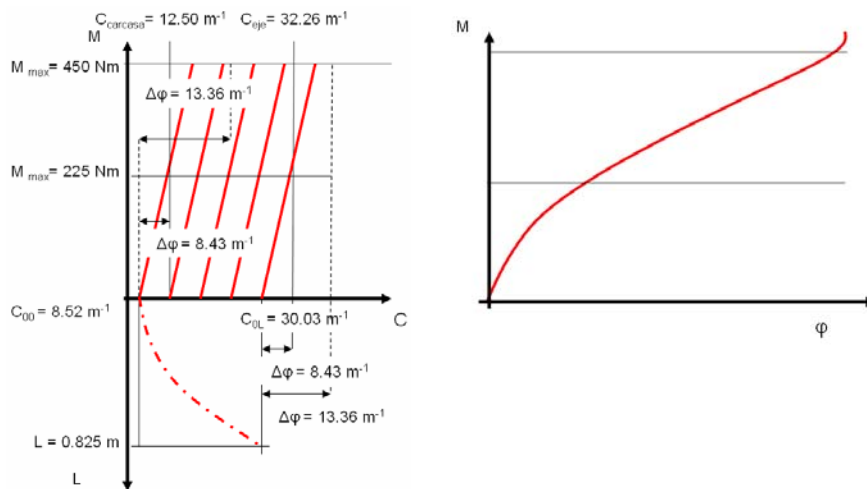


Figura 65. Curva característica de curvaturas y par ángulo girado del resorte.

Es posible realizar la representación gráfica de la curvatura del fleje respecto a la carcasa y el árbol para los diferentes pares de funcionamiento, y obtener la curva característica del resorte (Figura 65). La curva generatriz del resorte tienen coeficientes de expresión polinómica dependiente de la longitud son 8,05 como valor independiente, 14,68 lineal, -23,03 cuadrático y 29,56 cúbico.

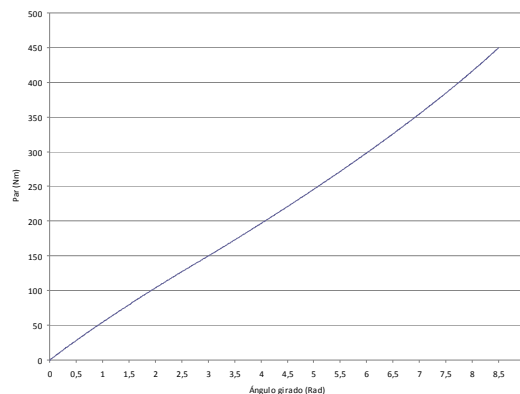


Figura 66. Curva característica del resorte diseñado.

Analizando la curva característica requerida se obtiene que la longitud del fleje deber ser de 0,825 m. Seleccionada la curva característica del resorte con dicha longitud (*Figura 66*) se observa que cumple con las especificaciones de diseño y que no se requiere variación local del módulo a flexión. También se comprueba que la longitud seleccionada no requiere modificación del diámetro exterior de la carcasa por problemas de interferencia o colisión entre espiras, ni modificaciones locales de la rigidez a flexión.

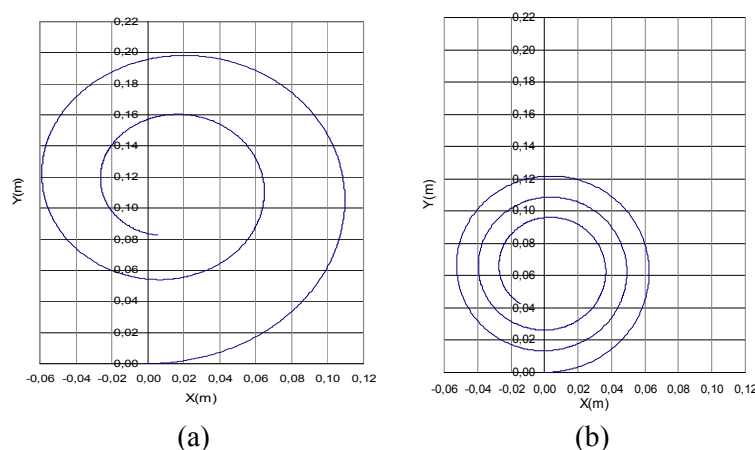


Figura 67. Espiral del resorte fabricado y con par de 225 Nm.

La curva característica obtenida (*Figura 66*) ha sido calculada numéricamente mediante la obtención de un par creciente hasta el valor máximo (división del par total en diferentes pasos de cálculo) de la curvatura de cada sección del fleje y de los puntos de bloqueo y desbloqueo. De igual manera se ha dividido la longitud del resorte en diferentes secciones de longitud homogénea, donde se calcula tanto las curvaturas deformadas como la rigidez a flexión. Conociendo la espiral deformada para dos pares diferentes consecutivos, es posible obtener la longitud bloqueada en el árbol (si la curvatura de la misma es menor que la del árbol), la longitud bloqueada en la carcasa (si su curvatura es mayor que la de la carcasa) y el ángulo girado por las espiras libres (suma de los cambios de curvatura en la longitud libre, esto es, entre los bloqueos en árbol y en carcasa). Conocidos dichos ángulos girados y la limitación de cambio de curvatura, es posible determinar por una parte el ángulo total girado, como la suma de todos ellos, y los incrementos de los ángulos tanto bloqueados como libre.

Los mismos datos anteriores permiten definir la geometría de fabricación del resorte y obtener la variación de las curvaturas, para los pares de bloqueo y máximo de funcionamiento, así como para cualquier otro par genérico. Con ello se puede representar la espiral de fabricación del resorte así como comprobar el proceso de carga y su deformada teórica (*Figura 67*).

Influencia del espesor del fleje sobre el resorte de par variable

Se analiza la influencia del espesor del fleje sobre el comportamiento del resorte de par variable. Se observa un comportamiento análogo al mostrado por el resorte de baja variabilidad. En la *Figura 68 (a)* se analiza la evolución de los cambio de curvatura con el par, teniendo en cuenta el espesor nominal del fleje de 5,34 mm.

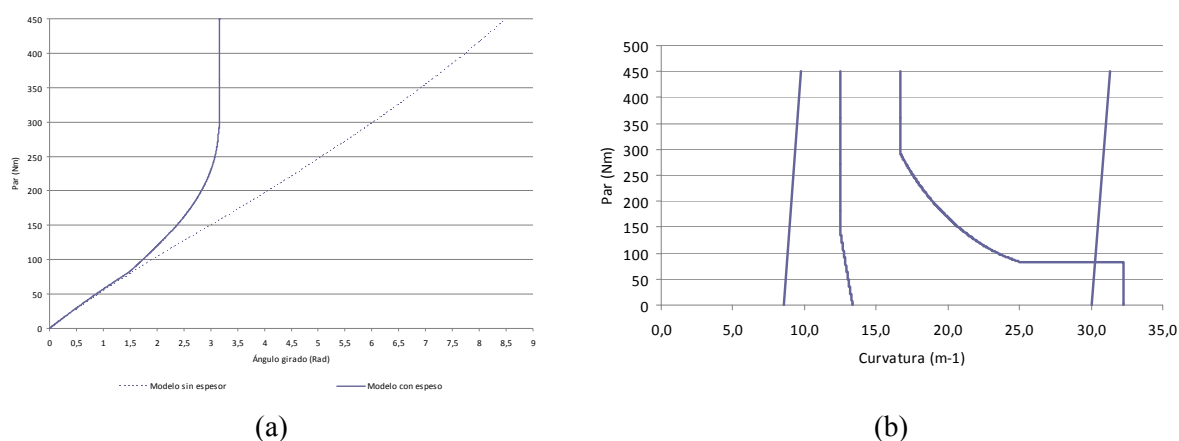


Figura 68. Curva par ángulo girado y curvaturas por efecto del espesor del fleje.

Las curvaturas de bloqueo en árbol y en carcasa (*Figura 68 (b)*), tienen valores constantes para el modelo sin espesor, mientras que pasan a ser valores variables por el incremento en el radio del árbol y decremento del radio de la carcasa, cuando se tiene en cuenta el espesor. Se pasa de disponer de una teórica curva de comportamiento sin espesor lineal, a otra curva con bloqueo anticipado de espiras. Esto implica la aparición de dos zonas de comportamiento adicional, una correspondiente al bloqueo en el árbol y otra al aumento del par con el fleje bloqueado en el árbol sin existencia de ángulo girado.

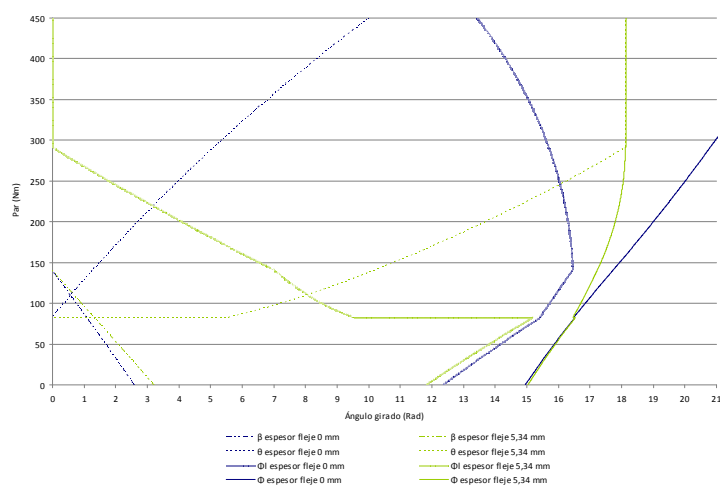


Figura 69. Influencia del espesor del fleje sobre los diferentes ángulos girados.

Se va a analizar cada una de las curvas par – ángulo girado (bloqueo en árbol, en carcasa y espiras libres) que constituye la curva de comportamiento para espesores entre 0 mm y el valor nominal de diseño 5,34 mm (Figura 69). Dicho análisis no ha sido realizado para el resorte anterior por no generar valor añadido respecto a este. Las representaciones gráficas y análisis del espesor, radio de la carcasa y del árbol, han sido realizados mediante la aplicación numérica del procedimiento de diseño expuesto en la Figura 38.

- Consideraciones sobre la variación del ángulo total girado con el espesor del fleje. El aumento del espesor del fleje produce una reducción del ángulo total girado así como el aumento del par máximo en la zona útil de la curva par - ángulo girado. Adicionalmente, aparece una zona de trabajo de la sección resistiva del fleje sin giro del mismo debido al bloqueo anticipado en el árbol, y la consecuente disminución de curvatura por aumento del radio. En el resorte original dicha zona de comportamiento vertical, aparecería para pares superiores al máximo de trabajo. Esa zona no debe ser considerada útil, ya que no proporciona ángulo girado. La zona inicial de desbloqueo en la carcasa y giro libre del fleje permanece invariante ante el espesor.

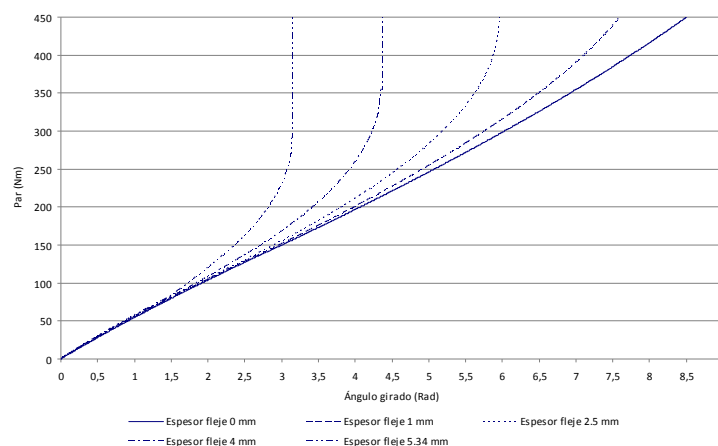


Figura 70. Influencia del espesor del fleje sobre curva característica.

- Consideraciones sobre la variación del ángulo girado por las espiras bloqueadas en la carcasa con el espesor del fleje. El aumento del espesor genera que a par cero, el ángulo inicial bloqueado en la carcasa sea mayor, siendo el comportamiento de las diferentes curvas análogo con el par de desbloqueo igual para todas ellas. El par de finalización del bloqueo en el árbol permanece constante, para el rango de espesores analizados, ya que va a depender de la finalización de las espiras bloqueadas en la carcasa, como intersección entre la curvatura a los diferentes pares y la curvatura de la carcasa, variable con el espesor.

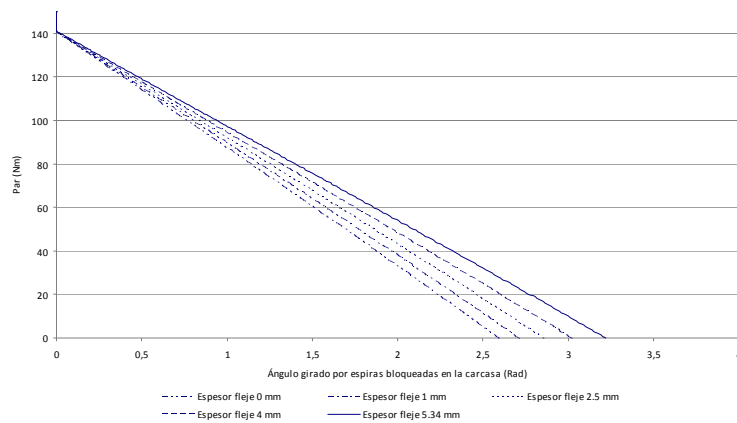


Figura 71. Influencia del espesor en el ángulo girado por las espiras bloqueadas en la carcasa.

- Consideraciones sobre la variación del ángulo girado por las espiras bloqueadas en el árbol con el espesor del fleje. El aumento del espesor del fleje genera la modificación de la curva par - ángulo girado por las espiras bloqueadas en el árbol. De manera genérica se produce un aumento del ángulo girado para par constante, superior al de bloqueo en el árbol, que permanece invariable con disminución progresiva de la pendiente de la curva.

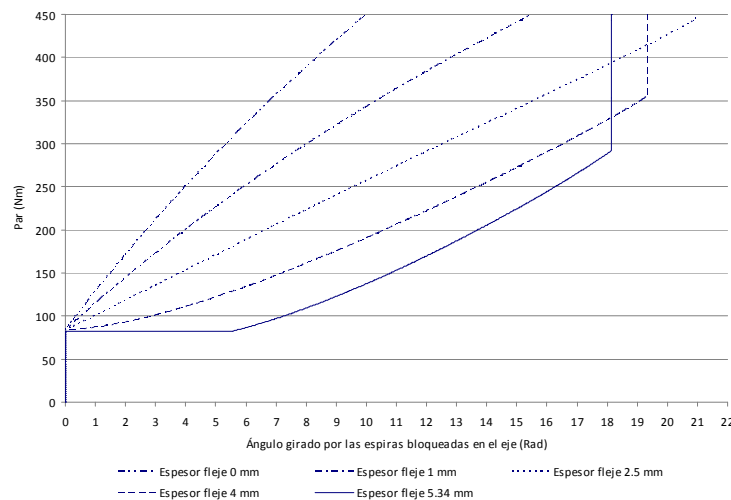


Figura 72. Influencia del espesor sobre ángulo girado por las espiras bloqueadas en el árbol.

Para los espesores más elevados de los considerados, se observan dos fenómenos. Por una parte la reducción del ángulo total girado y la aparición de una zona de comportamiento vertical, aumento del par sin variación del ángulo girado. Por otra parte, el aumento del ángulo inicial, que para el espesor de fabricación ya no es cero, sino que toma un valor de aproximadamente 6 rad. Así para el

espesor de diseño se suman los efectos de ángulo inicial de 6 rad y final de 18 rad por bloqueo en el árbol, y la eliminación del giro de las espiras bloqueadas en el árbol. La suma de ambos efectos implica de manera global una reducción del ángulo total girado.

- Consideraciones sobre la variación del ángulo girado por las espiras libres con el espesor del fleje.
En la representación gráfica del ángulo girado por las espiras libres se observan diferentes zonas de comportamiento. La primera zona, correspondiente al no bloqueo en el árbol con desbloqueo en la carcasa, no se observa influencia del espesor. Sin embargo a partir de dicho par, aproximadamente 80 Nm, se produce una disminución de la pendiente, aumento del ángulo girado total y disminución para cada par del ángulo puntual girado por las espiras libres. Para mayores espesores, como es el nominal de diseño, se produce una variación brusca del ángulo girado, al finalizar la zona de desbloqueo en la carcasa sin bloqueo en el árbol, causada por el cambio de curvatura del árbol con la longitud bloqueada para el par de 80 Nm y de 140 Nm. En la zona de transición entre la finalización del desbloqueo en la carcasa sin bloqueo en el árbol y con bloqueo. Se observa un comportamiento lineal y análogo al de la última zona de bloqueo en el árbol con toda la longitud desbloqueada de la carcasa.

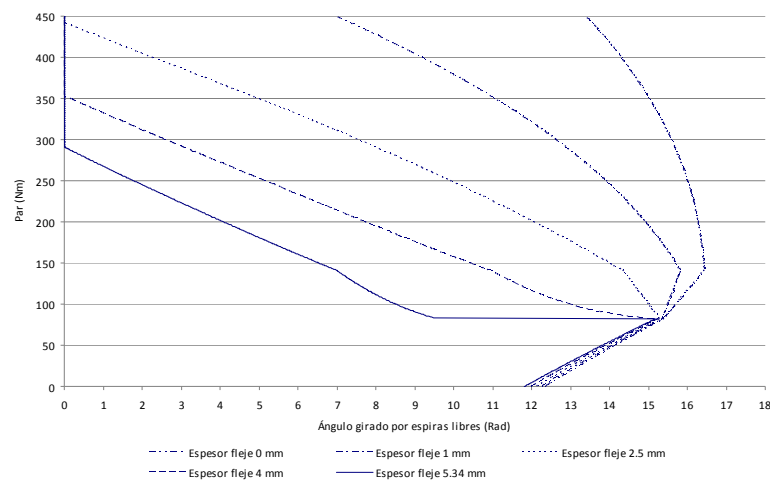


Figura 73. Influencia del espesor del fleje sobre ángulo girado por las espiras libres.

Consideraciones para resorte bloqueado a par máximo en el árbol con espiral de Arquímedes.

La forma de la espiral del resorte bloqueada en el árbol al par máximo será una espiral de Arquímedes, de ahí que se pueda obtener directamente tanto la curvatura en función del par aplicado como la de fabricación.

$$C_M(\varphi) = \frac{1}{k \cdot \varphi^n} - \frac{(M_{MAX} - M)}{(E \cdot I)(\varphi)} \quad C_0(\varphi) = C_{MAX}(\varphi) - \frac{M_{MAX}}{(E \cdot I)(\varphi)} = \frac{1}{k \cdot \varphi^n} - \frac{M_{MAX}}{(E \cdot I)(\varphi)} \quad (199-200)$$

En este caso el cálculo de los ángulos de bloqueo se simplifica, al aplicarse directamente que su curvatura sea la del árbol o la de la carcasa. Si se supone rigidez constante la expresión se simplifica aún más.

$$r = \frac{E \cdot I \cdot k \cdot \varphi^n}{E \cdot I - k \cdot \varphi^n \cdot (M_{MAX} - M)} \quad \varphi = \sqrt[n]{\frac{E \cdot I \cdot r}{E \cdot I \cdot k + k \cdot r \cdot (M_{MAX} - M)}} \quad (201)$$

De igual manera, el ángulo girado puede ser calculado al transformar la integración de $d\varphi$ a dl .

$$\Phi_l(M) = \int_{\beta}^{\theta} C_M(\varphi) \cdot dl = \int_{\beta}^{\theta} \left(\frac{1}{k \cdot \varphi^n} - \frac{M_{MAX}}{(E \cdot I)(\varphi)} + \frac{M}{(E \cdot I)(\varphi)} \right) \cdot \frac{\partial l}{\partial \varphi} \cdot d\varphi = \frac{\int_{\sqrt[n]{\frac{E \cdot I \cdot R}{E \cdot I \cdot k + k \cdot R \cdot (M_{MAX} - M)}}^{\sqrt[n]{\frac{E \cdot I \cdot R_L}{E \cdot I \cdot k + k \cdot R_L \cdot (M_{MAX} - M)}}} \left(\frac{1}{k \cdot \varphi^n} - \frac{(M_{MAX} - M)}{(E \cdot I)(\varphi)} \right) \cdot \frac{\partial l}{\partial \varphi} \cdot d\varphi}{\int_{\sqrt[n]{\frac{E \cdot I \cdot R}{E \cdot I \cdot k + k \cdot R \cdot (M_{MAX} - M)}}^{\sqrt[n]{\frac{E \cdot I \cdot R_L}{E \cdot I \cdot k + k \cdot R_L \cdot (M_{MAX} - M)}}} \left(\frac{1}{k \cdot \varphi^n} - \frac{(M_{MAX} - M)}{(E \cdot I)(\varphi)} \right) \cdot \frac{\partial l}{\partial \varphi} \cdot d\varphi}$$

$$l = \int_0^l \sqrt{dx^2 + dy^2} = \int_0^l \sqrt{(k \cdot \varphi^n \cdot \cos \varphi)^2 + (k \cdot \varphi^n \cdot \sin \varphi)^2} = \frac{k \cdot \varphi^{n+1}}{n+1} \quad \varphi = \sqrt[n+1]{\frac{l \cdot (n+1)}{k}}$$

$$\rho(\varphi) = k \cdot \varphi^n \quad x(\varphi) = k \cdot \varphi^n \cdot \cos \varphi \quad y(\varphi) = k \cdot \varphi^n \cdot \sin \varphi$$

$$\Phi_l(M) = \int_{R \cdot \beta}^{L_0 - R_L \cdot \theta} C_M(\varphi) \cdot dl = \int_{R \cdot \beta}^{L_0 - R_L \cdot \theta} \left(\frac{1}{k \cdot \varphi^n} - \frac{M_{MAX} - M}{(E \cdot I)(\varphi)} \right) \cdot dl = \int_{R \cdot \beta}^{L_0 - R_L \cdot \theta} \left(\frac{1}{k \cdot (l \cdot (n+1)/k)^{n+1}} - \frac{M_{MAX} - M}{(E \cdot I)(l \cdot (n+1)/k)^{n+1}} \right) \cdot dl \quad (202)$$

Otro caso particular corresponde a $n=k=l$ sin variación del módulo resistente con la longitud.

$$\Phi_l(M) = \int_{R \cdot \beta}^{L_0 - R_L \cdot \theta} \left(\frac{1}{\sqrt{2 \cdot l}} - \frac{M_{MAX} - M}{EI} \right) \cdot dl = \frac{2}{\sqrt{2}} \cdot (\sqrt{L_0 - R_L \cdot \theta(M)} - \sqrt{R \cdot \beta(M)}) - \frac{M_{MAX} - M}{EI} \cdot (L_0 - R_L \cdot \theta(M) - R \cdot \beta(M))$$

La formulación genérica, tiene sin embargo la indeterminación en la unión con el árbol. La condición de contorno viene dada por la curvatura del árbol para una longitud $L_0 - R_L \theta$. Se obtendrá el valor de la constante m para ajustar la curvatura, ya que la ecuación genérica de la espiral de Arquímedes no ha tenido en cuenta dicho radio.

$$C_M(l) = \frac{1}{k \cdot (l \cdot (n+1)/k)^{n+1}} - \frac{M_{MAX} - M}{(E \cdot I)(l \cdot (n+1)/k)^{n+1}}$$

$$C_M(l=L_0) = \frac{1}{R_L} = \frac{1}{k \cdot (L_0 \cdot (n+1)/k)^{1/n+1}} - \frac{M_{MAX} - M}{(E \cdot I) \left((L_0 \cdot (n+1)/k)^{1/n+1} \right)} + m$$

$$C_M(l) = \frac{1}{R_L} + \frac{1}{k \cdot (l \cdot (n+1)/k)^{1/n+1}} - \frac{1}{k \cdot (L_0 \cdot (n+1)/k)^{1/n+1}} - (M_{MAX} - M) \cdot \left[\frac{1}{(E \cdot I) \left((l \cdot (n+1)/k)^{1/n+1} \right)} - \frac{1}{(E \cdot I) \left((L_0 \cdot (n+1)/k)^{1/n+1} \right)} \right] \quad (203)$$

El caso particular hace que la curvatura corregida y el ángulo girado por las espiras libres sea:

$$\varphi(l) = \sqrt{2 \cdot l} \quad \varphi(l=0) = R \quad \varphi(l=L_0) = R_L \quad \varphi(l) = R + \sqrt{2 \cdot l}$$

$$\Phi_l(M) = \int_{R \cdot \beta}^{L_0 - R_L \cdot \theta} \left(\frac{1}{\varphi} - \frac{M_{MAX} - M}{(E \cdot I)(\varphi)} \right) \cdot dl = \int_{R \cdot \beta}^{L_0 - R_L \cdot \theta} \left(\frac{1}{R + \sqrt{2 \cdot l}} - \frac{M_{MAX} - M}{EI} \right) \cdot dl$$

$$\Phi_l(M) = \sqrt{2} \cdot \left(\sqrt{L_0 - R_L \cdot \theta} - \sqrt{R \cdot \beta} \right) - R \cdot \ln \frac{R + \sqrt{2 \cdot (L_0 - R_L \cdot \theta)}}{R + \sqrt{2 \cdot R \cdot \beta}} - \frac{M_{MAX} - M}{EI} \cdot (L_0 - R_L \cdot \theta - R \cdot \beta) \quad (204)$$

5.2.- Diseño de resorte espiral a torsión con baja variabilidad del par.

La curva generatriz del fleje del resorte de baja variabilidad del par debe tener inicialmente longitud bloqueada en la carcasa cuyo desbloqueo y bloqueo en el árbol conllevará la baja variabilidad. Para ello se va a utilizar una curva generatriz clotoidal, curvatura dependiente linealmente con la longitud, y variación del módulo a flexión inversamente proporcional a la longitud, siendo más resistente en la unión con el árbol que con la carcasa. Dicha selección posibilita realizar un tratamiento analítico del diseño (ver Capítulo 4)).

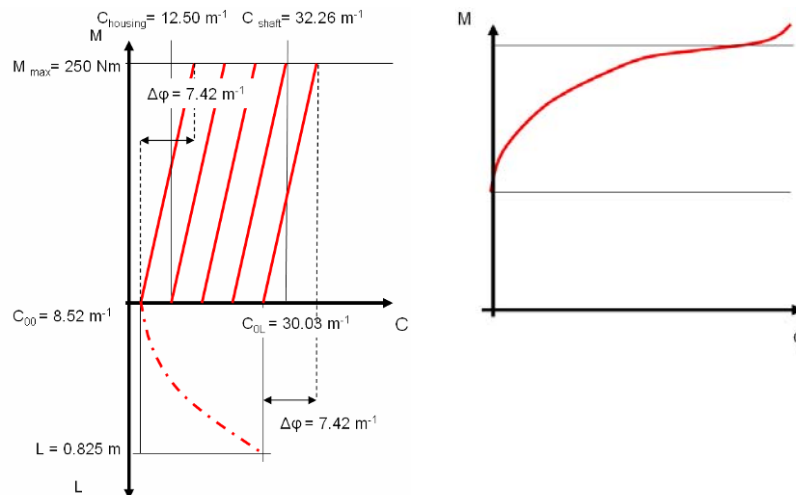


Figura 74. Curva característica de curvaturas y par ángulo girado del resorte.

El resorte debe disponer de un par máximo de 5.250 Nm con variabilidad del 5% y ángulo girado aproximado de 340 grados. Se podría plantear de igual manera que con el resorte de par variable las diferentes alternativas de decisión entre materiales y curvatura como las de la Tabla 10. Se empleará fibra de vidrio HP unidireccional bajo matriz epoxy, con tensión máxima admisible $7 \cdot 10^8$ Pa, densidad 1.800 kg/m^3 y módulo de Young $4,58 \cdot 10^8$ Pa.

El cambio de curvatura requerido será diferente a lo largo de la longitud del fleje, en la unión con la carcasa $3,28 \text{ m}^{-1}$ mientras que en el árbol de $2,28 \text{ m}^{-1}$, siendo estos valores menores que los máximos admisibles del material seleccionado. Con el estado de carga máximo que va a soportar el fleje, el espesor del mismo será de 7,8 mm (constante a lo largo de toda la longitud del fleje) con altura de 1,135 m para la unión con el árbol (lado de mayor tamaño) y 0,874 m en la unión con la carcasa (lado de menor tamaño) y una longitud total de 10 m (calculada a posteriori), siendo las inercias requeridas para ambos extremos de $4,49 \cdot 10^{-8} \text{ m}^4$ y de $4,46 \cdot 10^{-8} \text{ m}^4$ respectivamente. La variación a lo largo de la longitud del fleje de la altura del mismo es inversamente proporcional al posicionamiento de la sección, contada desde la unión con la carcasa. La variación total del módulo resistente a flexión se consigue a través de la variación de la inercia, ya que las características del material son constantes a lo largo de toda la longitud, entre las secciones extremas (coeficiente ζ de la formulación analítica) tiene un valor de -2,31%.

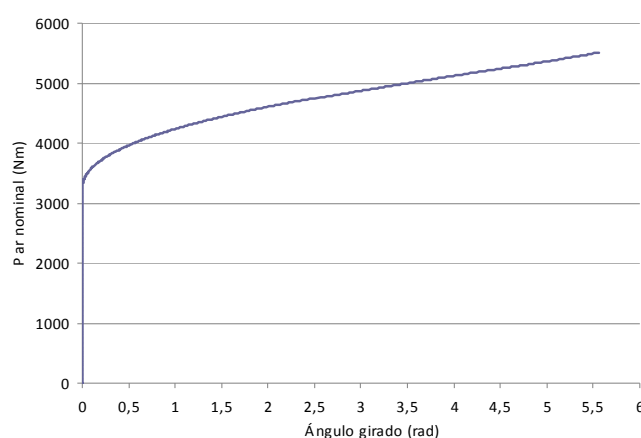


Figura 75. Curva característica del resorte.

Para realizar un análisis de curvaturas se requiere disponer del radio del árbol y de la carcasa. El radio del árbol mínimo (0,24 m) se calcula teniendo en cuenta criterios de resistencia mecánica ante el estado tensional máximo y mínima interferencia entre espiras en todas las circunstancias de funcionamiento. Por otra parte, para la carcasa se ha de tener en cuenta el bloqueo simultáneo de espiras entre el rango de baja variabilidad del par y la no interferencia de espiras en funcionamiento. En el caso planteado se selecciona un valor de radio de carcasa de 0,29 m. Para lo cual se ha tenido en cuenta tanto las espirales de bloqueo en

árbol y carcasa para pares máximos y mínimos así como la no interferencia de espiras en funcionamiento. Con todo ello se dispondrá de unas curvaturas de valor $4,17 \text{ m}^{-1}$ para el árbol y de $3,45 \text{ m}^{-1}$ para la carcasa. Una vez conocidas las curvaturas de la carcasa y del árbol, es importante delimitar las curvaturas del fleje con el fin de cumplir la forma de la curva característica especificada. La curva generatriz clotoideal, tendrá curvatura inicial en la carcasa de $0,17 \text{ m}^{-1}$ y final en el árbol de $1,88 \text{ m}^{-1}$. Con los datos planteados, hasta el momento, es posible realizar la representación gráfica de la curvatura del fleje respecto a la carcasa y el árbol para los diferentes pares de funcionamiento (*Figura 74*).

Analizando la curva característica requerida es posible obtener la longitud del fleje que deber ser de 10 m. La curva característica obtenida cumple con la especificada (*Figura 75*) y no se requiere variación local del módulo a flexión de la sección resistente. Así mismo la longitud seleccionada no requiere modificar el valor de diseño del diámetro de la carcasa.

Las representaciones de la geometría de fabricación del resorte y la variación de las curvaturas, para los pares de bloqueo y máximo de funcionamiento, han sido calculadas numéricamente de la misma forma a la descrita anteriormente (*Figura 76*). En dicha representación gráfica se puede observar la no interferencia teórica de espiras y el diseño de árbol y carcasa para que no exista bloqueo.

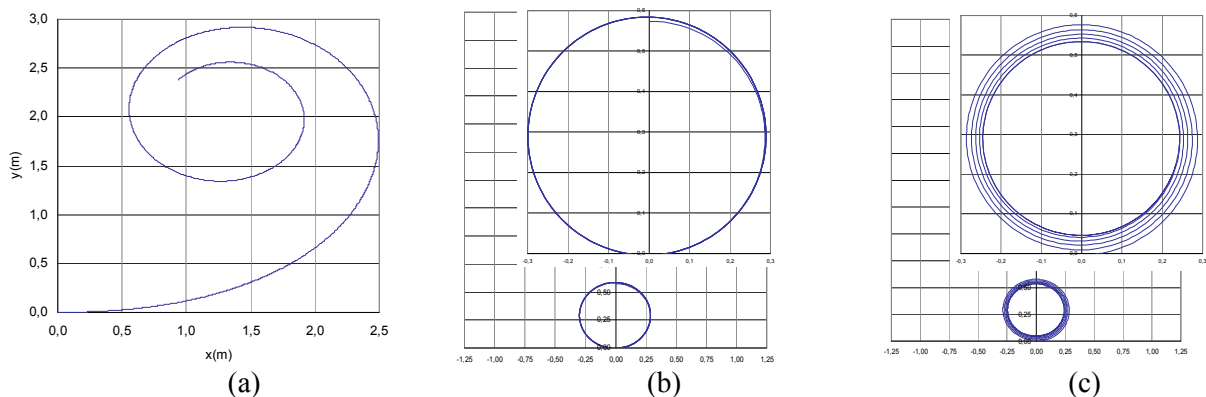


Figura 76. Representación geométrica del resorte fabricado y límites de constancia del par.

Influencia del espesor del fleje sobre el resorte de baja variabilidad del par.

En la *Figura 77* se observa la influencia del espesor del fleje sobre el comportamiento del resorte diseñado con anterioridad para par de baja variabilidad. Se observa variación con el par de las curvaturas de bloqueo tanto en carcasa como en árbol. Se produce una reducción del ángulo girado; el modelo sin espesor dispone de un ángulo girado de aproximadamente 10 rad para un rango de par entre 3.000 Nm y 6.000 Nm.

El modelo que tiene en cuenta el espesor nominal genera un ángulo máximo girado de aproximadamente 4 rad con un par entre 4.000 Nm y 5.000 Nm.

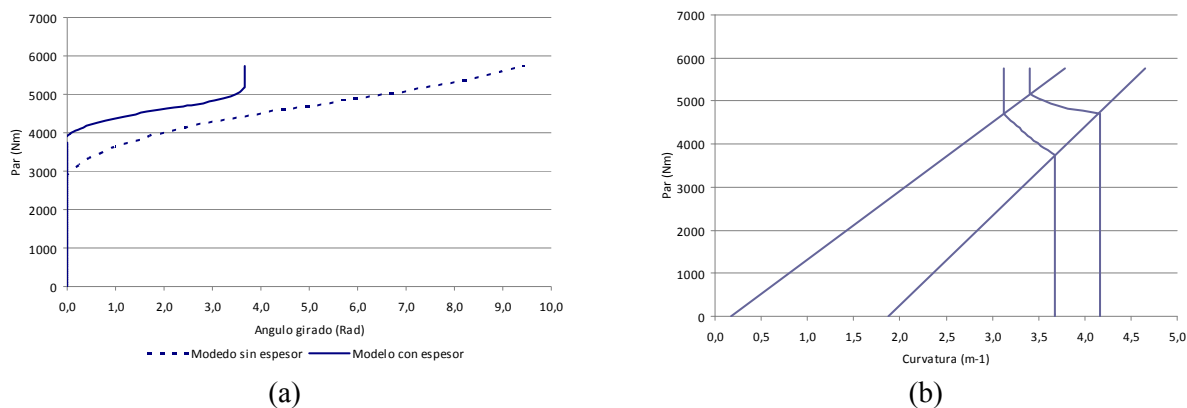


Figura 77. Curva par ángulo girado y curvaturas por efecto del espesor del fleje.

La influencia del espesor también genera la aparición de una nueva zona en la curva característica del resorte. El modelo de resorte sin espesor parte de un valor de par bloqueado para pasar por una zona de bloqueo y desbloqueo simultaneo, y finalizar en un giro libre y bloqueo en el árbol. Sin embargo el modelo con espesor dispone de una zona adicional en la curva característica, de comportamiento vertical, que no genera rango útil de par – ángulo. Dicha zona aparece por el bloqueo total del fleje sobre el árbol. El aumento del par debido al bloqueo anticipado de espiras se observa tanto en árbol (de 6.000 Nm a 4.850 Nm) como en carcasa, de 5.500 Nm a 3.800 Nm.

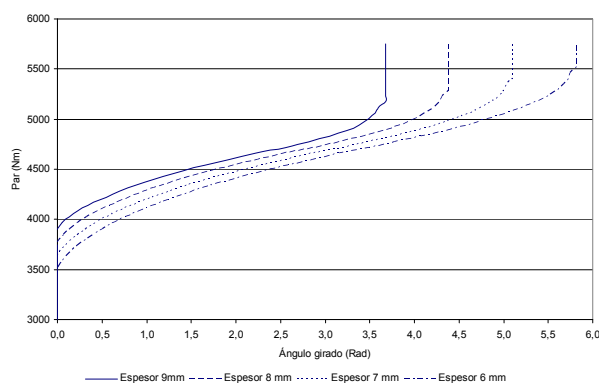


Figura 78. Influencia del espesor del fleje para el resorte de baja variabilidad del par.

La curva característica par - ángulo girado, tiene forma análoga con un espesor entre 6 mm y 9 mm (Figura 78). Se observa aumento con el espesor del par inicial, debido al bloqueo en la carcasa y un aumento del ángulo girado con la disminución del espesor. Aumenta la zona de bloqueo en el árbol, permaneciendo constante el par máximo aunque se reduce el rango útil.

Consideraciones curva clotoidal con variación del módulo resistente inversamente proporcional a la longitud. Resorte con baja variabilidad del par

Las ecuaciones de definición de este tipo de resorte son curvatura de fabricación en función de la longitud, variación del módulo resistente y curvatura en función del par (coeficiente adimensional μ). Estas consideraciones particulares en un resorte espiral a torsión hacen que proporcione una curva par – ángulo girado de baja variabilidad con par nominal M y variabilidad $\pm \varepsilon$.

$$C_0(l) = a + b \cdot \frac{l}{L_0} \quad E(l) \cdot I(l) = \frac{E(0) \cdot I(0)}{1 + \xi \cdot \frac{l}{L_0}} \quad (205-206)$$

$$C_M(l) = (a + \mu) + (b + \mu \cdot \xi) \cdot l/L_0 \quad \mu = \frac{M}{E_0 \cdot I_0} \quad (207-208)$$

A partir de la definición realizada de los ángulos bloqueados en carcasa y árbol se pueden calcular las longitudes bloqueadas, que serán los límites de integración de las espiras libres en función del par aplicado para obtener el ángulo girado por las espiras libres.

$$\Phi_l(M) = \int_{\beta}^{\theta} C_M(l) \cdot d\varphi = \int_{R \cdot \beta}^{L_0 - R_L \cdot \theta} C_M(l) \cdot dl \quad (209)$$

La optimización del diseño del resorte espiral implicará la no existencia de espiras bloqueadas en la carcasa para pares mayores al límite superior de la zona de baja variabilidad $M(1+\varepsilon)$ ni espiras bloqueadas en el árbol para pares menores al límite inferior de la zona de baja variabilidad $M(1-\varepsilon)$. Dichas consideraciones permiten calcular las longitudes y ángulos de bloqueo.

- Límite superior de baja variabilidad del par $M = M(1+\varepsilon)$.

$$C_{M(1+\varepsilon)}(l) = (a + \mu \cdot (1 + \varepsilon)) + (b + \mu \cdot (1 + \varepsilon) \cdot \xi) \cdot l/L_0 \quad L_0 - \theta \cdot R_L = \frac{1/R_L - (a + \mu \cdot (1 + \varepsilon))}{(b + \xi \cdot \mu \cdot (1 + \varepsilon))} \quad (210)$$

- Límite inferior de baja variabilidad del par $M = M(1-\varepsilon)$.

$$C_{M(1-\varepsilon)}(l) = (a + \mu \cdot (1 - \varepsilon)) + (b + \mu \cdot (1 - \varepsilon) \cdot \xi) \cdot l/L_0 \quad \beta \cdot R = L_0 \cdot \frac{1/R - (a + \mu \cdot (1 - \varepsilon))}{(b + \xi \cdot \mu \cdot (1 - \varepsilon))} \quad (211)$$

$$C_{M(1-\varepsilon)}(R \cdot \beta) = 1/R$$

Para un par genérico M , se deberá comparar la curvatura para cada longitud con los valores de la carcasa y del árbol con el fin de localizar los límites de integración para obtener el ángulo girado por las espiras libres. Permite comprobar si existe bloqueo en árbol o en carcasa y el ángulo máximo bloqueado en el árbol y en la carcasa.

$$C_M(l) = (a + M/EI) + (b + M/EI \cdot \xi) \cdot l/L_0 \quad (212)$$

$$C_M(l = R \cdot \beta) = (a + M/EI) + (b + M/EI \cdot \xi) \cdot R \cdot \beta / L_0 = 1/R \quad \beta \cdot R = L_0 \cdot \frac{1/R - (a + M/EI)}{(b + \xi \cdot M/EI)} \quad (213-214)$$

$$C_M(l = L_0 - R_L \cdot \theta) = (a + M/EI) + (b + M/EI \cdot \xi) \cdot (L_0 - R_L \cdot \theta) / L_0 = 1/R_L \quad L_0 - \theta \cdot R_L = \frac{1/R_L - (a + M/EI)}{(b + \xi \cdot M/EI)} \quad (215-216)$$

Así, para pares inferiores al límite inferior de la zona de baja variabilidad de par, el resorte se encontrará bloqueado en la carcasa y para pares superiores al límite superior de la zona de baja variabilidad de par el resorte se encontrará bloqueado en el árbol. Así, si se parte del origen el último punto con curvatura mayor que la carcasa será el que determine la longitud de bloqueo en la carcasa y el primer punto con curvatura menor que la del árbol será el que determine el bloqueo en este (*Tabla 11*).

Tabla 11. Consideraciones de bloqueo en árbol o carcasa.

Consideración $C_M(l)$	Estado de la espira
$C_M(l) > R$	Bloqueo en la carcasa
$R_L < C_M(l) < R$	Espira libre
$C_M(l) < R_L$	Bloqueo en el árbol

Capítulo 6.- MATERIALES EMPLEADOS. OPTIMIZACIÓN DEL FLEJE.

Una vez analizadas las características técnicas y el procedimiento de diseño de resortes espirales a torsión, se plantean los materiales con los que fabricar el fleje y las posibles optimizaciones de su peso, dimensiones y energía almacenada entre otras. La optimización se puede llevar a cabo a través del material, de la sección resistente (tanto su forma geométrica como los diferentes materiales que la pueden constituir logrando que cada una de las secciones trabaje a su tensión máxima) o de las posibles configuraciones de montaje (en serie o en paralelo manteniéndose el mismo ángulo girado o el mismo par).

6.1.- Optimización del espacio ocupado. Configuraciones serie y paralelo.

La primera posibilidad de optimización del resorte, viene dada por la configuración serie o paralelo de los mismos. El objetivo es disminuir el espacio ocupado y favorecer la compacidad del sistema. La configuración de resortes en serie va a estar solicitada con el mismo par que el resorte original, lográndose disminuir la longitud total de cada uno de los flejes así como del radio de la carcasa. Mientras, la configuración paralela implica disponer de varios resortes unidos al mismo árbol. Cada uno de ellos va a tener una menor altura y menor espesor, girando el mismo ángulo pero con menores solicitaciones de par (*Figura 79*).

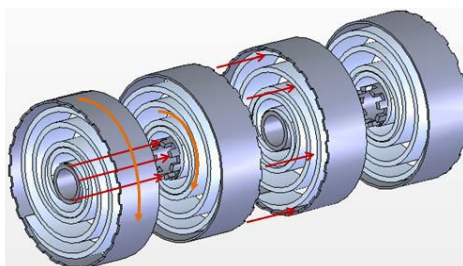


Figura 79. Acoplamiento de cuatro resortes serie y dos paralelos.

El diseño, teniendo en cuenta ambas configuraciones, posibilita una reducción importante de espacio del sistema completo, sin embargo implica la necesidad de disponer ciertos accesorios de unión entre resortes. La unión en serie de resortes, puede ser realizada mediante dentado axial en unos casquillos cilíndricos de unión tanto en el árbol como en la carcasa. Con ello un resorte fijado en el interior transmite el par al vaso exterior, el cual conectado en serie con el siguiente vaso exterior, transmite el par al resorte y este al vaso interior, conectado al siguiente vaso interior; realizándose así la operación de forma consecutiva. Para la

unión en paralelo lo único que hay que hacer es unir los diferentes resortes al mismo árbol, lo que va a generar mayor dificultad de fabricación.

Las configuraciones serie y paralelo a partir de un determinado resorte base generan ciertas modificaciones del fleje. Se parte de un resorte sin bloqueo y con una sección resistente rectangular constante a lo largo de toda su longitud (por simplicidad de los cálculos asociados). Para un determinado material, la tensión no depende de la anchura del fleje, sólo del cambio de curvatura. La anchura define el par necesario para alcanzar el cambio de curvatura (ver Capítulo 3). Así si se divide el espesor por un factor k , para una misma tensión, el cambio de curvatura se multiplica por el factor k . Si se requiere que dicha tensión y cambio de curvatura se produzca con el mismo par, la inercia se ve reducida en el factor k y la altura aumenta en un factor k^2 . Por tanto, dividir en un factor k el espesor, con la misma longitud de fleje, implica:

- Multiplicar por el factor k el número de vueltas del resorte (si no hay bloqueo) al multiplicar el cambio de curvatura por el factor k .
- Multiplicar por el factor k^2 la altura del resorte.

Dichas variaciones son energéticamente lógicas, ya que la energía se multiplica por el factor k , ya que lo hace el ángulo girado al mismo par y el peso se multiplica también por el factor k . El factor del peso se debe a que el espesor se divide por el factor k pero la altura se multiplica por el factor k^2 , con lo que el volumen se ve afectado por un factor k .

Tabla 12. Análisis de configuraciones serie paralelo.

Par	Configuración serie	Configuración paralelo	Energía
M	1x(b,h)	1x(b,h)	E
2M	2x(b,h)	1x(4b,h/2), 4x(b,h/2)	2E
3M	3x(b,h)	1x(9b,h/3), 3x(3b,h/3), 9x(b,h/2)	3E
4M	4x(b,h)	1x(16b,h/4), 4x(4b,h/4), 16x(b,h/4)	4E

A partir del análisis realizado para las configuraciones serie y de forma análoga para las paralelo, es posible plantear el cuadro de configuraciones con el aumento del par y por tanto de la energía (*Tabla 12*). Para los mismos pesos y volumen de resorte, la configuración serie permite carcasa con menor longitud mientras que la configuración paralelo permite menor diámetro, a demás de menores cargas por unidades de longitud en las uniones. El volumen total del sistema resorte – carcasa es igual en ambas configuraciones ya que depende del producto de la altura por el espesor al cuadrado.

6.2.- Optimización de la sección resistente del fleje.

A lo largo del desarrollo teórico ha sido analizada la optimización resistente del fleje del resorte con el fin de que cada sección trabaje a la tensión máxima admisible. El análisis que se plantea ahora es la optimización de la densidad de energía. Para lo cual se analiza el resorte como una viga cuya densidad de energía es la producida por su deformación elástica. Para solicitaciones de flexión pura en secciones macizas (como es el caso de los resortes desarrollados) la densidad energía (medida en julios por unidad de peso) es proporcional a la tensión máxima admisible e inversamente proporcional al módulo de Young y a la densidad: [Ashby, 1999; Al Qureshi, 2001; Chen, 2006; Chiu, 2005; Hahn, 1995; Hou, 2007; Hou, 2005; Miracle, 2001; Ng, 2003; Ohtsuki, 2001; Smith, 2004; Soroushian, 2000; Shokrieh, 2003; Sui, 2001; Tse, 1995; Wong, 2004].

$$\frac{U}{P} = \frac{\sigma^2}{6 \cdot E \cdot \rho} \quad (217)$$

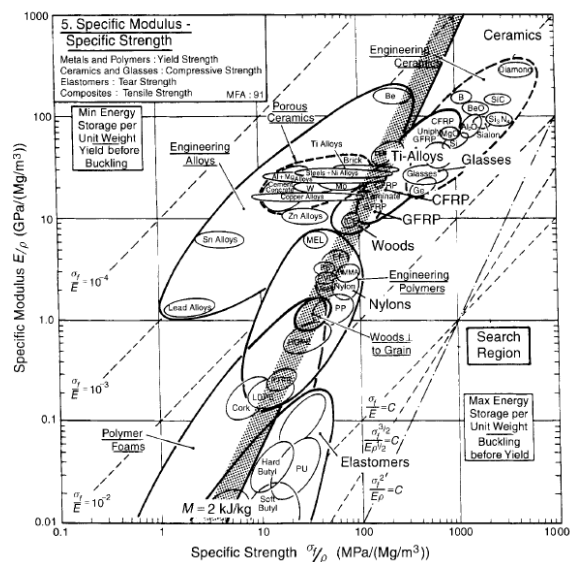


Figura 80. Relación entre módulo de Young y tensión máxima específica [Ashby, 1999].

En el proceso de optimización se deben tener en cuenta dos aspectos fundamentales: los materiales empleados y la geometría de la sección resistente. La fórmula de la densidad de energía puede ser generalizada para secciones no macizas.

$$U = \iiint_V \frac{1}{2} \cdot \frac{\sigma^2}{E} \cdot dx dy dz \quad (218)$$

En cuanto a la elección del material, se plantea la construcción de los resortes en materiales compuestos, por su excelente relación resistencia - peso que permite llevar a cabo diseños muy resistentes y ligeros. Otra ventaja es la capacidad que tienen para adaptarse a distintas formas geométricas antes de ser curados. Su

capacidad de absorción de energía, choques,... hace que sean adecuados a la hora de desarrollar aplicaciones innovadoras.

Sin embargo existe un inconveniente de estos materiales, su resistencia a compresión en laminados unidireccionales (en principio los más apropiados para la fabricación de los resortes espirales a torsión, al proporcionar las mejores características a lo largo de la línea media del mismo), tiene un valor que coincide aproximadamente la mitad de la resistencia a tracción. Este hecho genera que la tensión máxima admisible de la viga venga limitada por la tensión admisible a compresión, reduciéndose de esta manera la densidad de energía cuatro veces respecto a la que tendría si la tensión admisible fuera la de tracción. Por esto, en principio interesa diseñar secciones no simétricas situando la línea neutra de tal manera que permita alcanzar la tensión admisible del material en la parte de tracción y la mitad en la de compresión.

En la *Figura 80* se observa la elección de los materiales compuestos para el almacenamiento de energía. Se presenta en el eje de ordenadas valores de tensión específica frente a valores del módulo de elasticidad específico en el eje de abscisas. La zona gruesa sombreada indica que los materiales situados a la derecha de esta línea ofrecerán una mejor capacidad de almacenamiento de energía por unidad de peso, mientras los materiales situados a la izquierda este valor será peor. De su análisis se deduce que los materiales metálicos como el acero no son adecuados para almacenar energía. Sin embargo los materiales compuestos presentan buenas propiedades, aunque sin duda alguna, los materiales más adecuados para este propósito, sin tener en cuenta ninguna otra consideración, son los cerámicos, fibra de vidrio sin reforzar o elastómeros. Sin embargo cada uno de estos materiales presente un problema que no le permite utilizarse para construir el resorte. Tanto los cerámicos como la fibra de vidrio sin reforzar son muy frágiles, no serían capaces de soportar los procesos de carga y descarga del resorte ni tienen capacidad de adaptarse a las curvaturas requeridas. De ahí que el tipo de materiales a emplear en el desarrollo de los resortes serán los materiales compuestos con base a matriz epoxy, principalmente con fibras de carácter unidireccional. Téngase en cuenta que los resortes para ensayos han sido fabricados en fibra de vidrio unidireccional bajo matriz epoxy.

Conjuntamente con el material la forma de la sección resistente va a influir decisivamente en la energía almacenada. Para su análisis, se puede definir un factor de forma $((\Phi_B^f)^2 / \Phi_B^e)$ puramente geométrico, [Ashby, 1999], proporcional a la densidad de energía (*Figura 81*). De todas estas secciones la elíptica hueca es la que ofrece una mayor densidad de energía. Esto parece algo lógico, ya que al tratarse de una sección hueca se elimina gran cantidad de material que apenas trabaja. Sin embargo la fabricación de dicha sección presenta gran complicación y altos costes. En consecuencia, la mejoría en términos de densidad de energía no se ve compensada en términos económicos ni de fabricabilidad, por consiguiente, se ha de buscar una sección que ofrezca un compromiso entre dichos aspectos. Otras de las secciones con mayor factor de forma

son la rectangular hueca y la de placas paralelas como principales alternativas de mejora respecto a la sección monolítica.

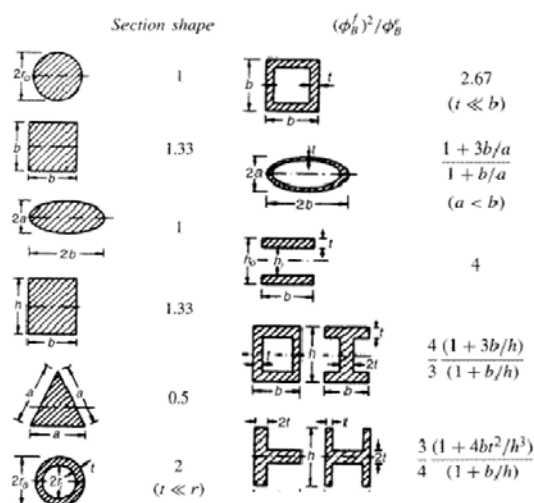


Figura 81. Factores de forma de diferentes secciones resistentes [Ashby, 1999].

6.2.1.- Empleo de materiales compuestos para la fabricación del fleje del resorte.

Dentro de las ventajas mencionadas de los materiales compuestos, y por ellas empleados en la fabricación de los resortes están su resistencia mecánica, rigidez, resistencia a la corrosión, desgaste y fatiga, ligereza o su aislamiento térmico y acústico. Existen tres grandes grupos de materiales compuestos, los formados por una matriz reforzada con fibras de otro material, los laminados compuestos de diferentes materiales superpuestas unas a otras y los de matriz reforzada con partículas de otro material.

En la primera de estas categorías, el uso de fibras viene motivado por motivos resistentes y de rigidez, ya que la fibra tiene mejores propiedades que el material base. Por ejemplo, una placa de vidrio rompe a una determinada tensión, mientras que una fibra de vidrio lo hará a una tensión hasta tres órdenes de magnitud mayor. La explicación de este hecho es sencilla, si se tiene en cuenta que la densidad de defectos o dislocaciones dentro de la fibra es menor que la cantidad de defectos en la placa; además, la estructura cristalina de la placa es mucho más imperfecta que la de la fibra.

Una vez expuestas las ventajas de utilizar material en forma de fibra, surge la necesidad de conocer la longitud adecuada de las mismas, es decir, si es mejor utilizar fibras largas o cortas. A priori puede parecer que es más ventajoso utilizar fibras cortas, ya que la resistencia mecánica de estas es mayor que el de las fibras largas del mismo material, debido a que las primeras presentan una estructura cristalina más perfecta que las segundas. Sin embargo resulta mucho más sencillo orientar las fibras largas en una dirección determinada que los cortas, por tanto tiene una mayor implementación industrial en altos requerimientos

mecánicos. Esta ventaja hace que los materiales compuestos más utilizados en la actualidad son los formados por una matriz polimérica reforzada con fibras largas. La misión de éstas es proporcionar al material la rigidez y resistencia necesarias, mientras que la matriz se encarga de actuar como transmisora de fuerza entre las fibras y proporcionar a éstas una configuración geométrica concreta.

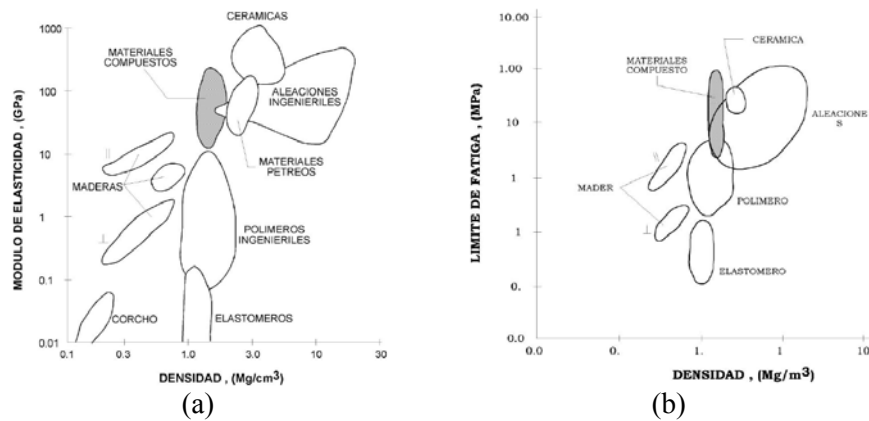


Figura 82. Relación densidad – módulo de elasticidad y límite de fatiga en distintos materiales [Ashby, 1999].

La Figura 82 (a) representa el valor del módulo de elasticidad frente a la densidad. Se observa que los materiales compuestos ofrecen una rigidez muy similar a las aleaciones de uso industrial pero con mucho menor peso. Por ejemplo en el caso de las maderas, la rigidez aumenta en diez órdenes de magnitud si se mide en dirección de las fibras, respecto al valor de la rigidez medido en la dirección perpendicular a las mismas. También se representa la variación del límite de fatiga (amplitud de la variación de tensión que, aplicada sobre el elemento estructural a análisis, no produce su fisuración ni su rotura) frente a la densidad. Se observa el buen comportamiento de los materiales compuestos ante este tipo de solicitaciones. (Figura 82 (b)).

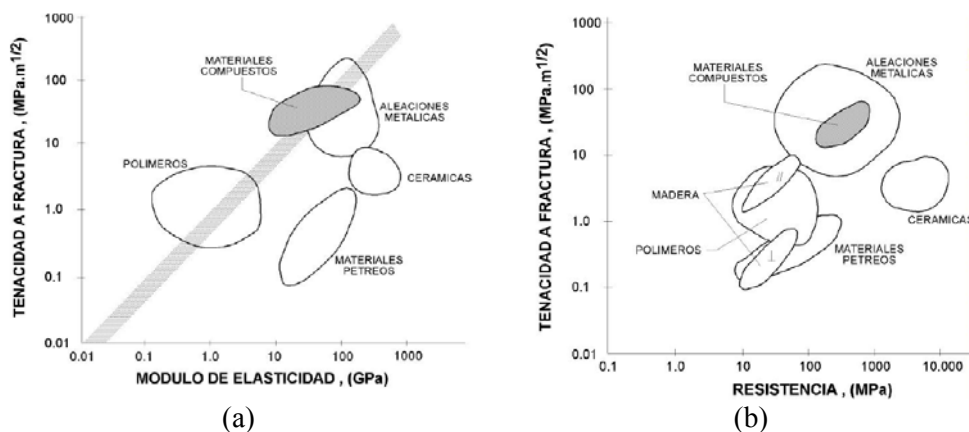


Figura 83. Relación tenacidad a fractura E y σ_{admC} para distintos materiales [Ashby, 1999].

Por otra parte se representa la tenacidad a la fractura (es decir, la resistencia de un material a romperse cuando en su seno existe una fisura) frente al módulo de elasticidad para distintos materiales. Se puede observar que los materiales compuestos presentan unas tenacidades de fractura equiparable a la de las aleaciones metálicas de uso habitual en la ingeniería manteniendo una rigidez parecida (*Figura 83 (a)*). También se compara la tenacidad a la fractura frente a la resistencia a la compresión, observándose que los materiales compuestos presentan unas propiedades similares a las aleaciones metálicas (*Figura 83 (b)*).

El empleo de los materiales compuestos, a demás de por las características mecánicas mostradas anteriormente, también es favorable en el caso de los resortes con variación de la rigidez a flexión a lo largo de su longitud. La rigidez a flexión del fleje varía a lo largo de la longitud de este y depende tanto del módulo de elasticidad (modificable con el refuerzo en un material compuesto) como de la inercia de la sección resistente (modificable con la geometría y dimensiones de la sección). Así, por ejemplo en el resorte de baja variabilidad del par (diseñado mediante una espiral clotoideal con variación de la rigidez a flexión de forma inversamente proporcional a la longitud), se requería una variación de la rigidez a flexión a lo largo de la longitud, característica que puede ser obtenenida con mayor versatilidad y de forma más sencilla con el empleo de materiales compuestos. Un fleje constituido por fibras y matriz permite una gran flexibilidad, ya que la inercia no solo depende del porcentaje de refuerzo, sino también de la disposición de las fibras en cada sección. Para una determinada sección (en una longitud genérica) se definen en la *Tabla 13* la relación entre momento, inercia y módulo elástico entre fibra y matriz; así como las relaciones que deben existir entre ellas, formulación básica para llevar a cabo cualquier diseño empleando este tipo de materiales.

Tabla 13. Características de par e inercia para matriz y fibras.

M par total en la sección	M _F par soportado fibras	M _M par soportado matriz
$M = M_F + M_M$	M_F	M_M
I momento de inercia de la sección	I _F momento de inercia fibras	I _M momento de inercia matriz
$I = I_F + I_M$	I_F	I_M
Igualdad de curvatura		Igualdad de alargamiento
$\frac{M_F}{E_F \cdot I_F} = \frac{M_M}{E_M \cdot I_M}$		$\frac{\sigma_F}{E_F} = \frac{\sigma_M}{E_M}$

Con un planteamiento púramente teórico, existe una gran variedad de alternativas de diseño. Sin embargo, si se realiza un mínimo análisis de viabilidad industrial y fabril, se observan dos alternativas más sencillas: material constante con variación de la geometría de la sección (o lo que es lo mismo, inercia variable con módulo de elasticidad constante) o geometría constante con material que varia sus propiedades (inercia constante con módulo de elasticidad variable). Así, la variación de la rigidez a flexión se deberá a la inercia o al módulo de elasticidad y no a la combinación de ambas. Los límites generados al aplicar la

limitación anterior permite disponer de un amplio rango de posibilidades de diseño. Aún más, aunque la sección se limitase a la de mayor facilidad de construcción, como es la rectangular, las posibilidades de variación y optimización continuarían siendo múltiples. Esto se debe a que, se podría variar tanto el material, la anchura y la altura, tanto de manera independiente como conjugada.

6.3.- Optimización del cambio de curvatura.

El cambio de curvatura interesa que sea, en principio, lo más alto posible, debido a que se obtiene un fleje delgado, con lo que para un mismo diámetro de carcasa hay más longitud de fleje, aunque tiene el inconveniente de que se produce un aumento de la altura de la sección resistente. Si se supone, por simplicidad, un resorte de sección rectangular constante con la longitud, la reducción a la mitad del espesor (con los mismos valores de módulo de elasticidad y de tensión máxima admisible) duplica el ángulo girado para la misma longitud (o permite reducir la longitud a la mitad para conseguir el mismo ángulo girado). Sin embargo, para reducir la tensión a la mitad, para el mismo par, hay que duplicar la inercia, por lo que la altura se duplicará a igualdad de espesor, lo que implica que el volumen y el peso se duplica.

Por tanto, los efectos de multiplicar el número de vueltas, y así duplicar la energía, son el aumento del volumen, el aumento de la altura por cuatro y la reducción del espesor a la mitad con la misma longitud o duplicar la longitud con la mitad de espesor y doble altura, si se decide construir un único resorte. Sin embargo, existe la posibilidad de emplear dos resortes en serie, con las mismas características que el original. Tienen el inconveniente de requerir un conjunto de periféricos para su funcionamiento conjunto, o en paralelo, que elimina los periféricos pero se complica la posible fabricación y montaje de los dos flejes.

Por otra parte, la opción de un único resorte genera ciertas limitaciones en el diseño a tener en cuenta:

- La altura de la sección resistente es mucho mayor que las otras dos. En casos límite puede implicar que el modelo de viga analizado, y base del desarrollo teórico no sea válido, y se necesite el análisis con modelos de placa. Así mismo se producen pérdidas, efectos de cortadura, efectos interlaminares....entre otros, que no aparecen en una sección esbelta.
- Posible aparición de efectos de tensiones debidas al peso propio difíciles de ser cuantificadas y de evitar su influencia en el funcionamiento del resorte.
- En el caso de emplear el doble de longitud, hay que tener en cuenta que la espiral de fabricación va a ser el doble de larga con los problemas asociados a su fabricabilidad.

- En el caso de los resortes en paralelo aparecen complicaciones tanto para la fabricación como para el montaje en un único árbol y carcasa, con diferentes entradas.

En contrapartida a los inconvenientes anteriores, la elección de un único resorte presenta ciertas ventajas respecto a las configuraciones de resortes en serie o paralelo

- No se requieren los mecanismos asociados de unión de resortes en serie, disminución de posibles fuentes de error y distorsión tanto en montaje como en funcionamiento.
- El modelo de análisis del fleje es una viga y no una placa.
- Disminución del momento de inercia con reducción de los problemas de delaminaciones en materiales compuestos y disminución del coste de fabricación.
- Las uniones del fleje, tanto a la carcasa como al árbol, soportan la mitad del par.

Las ventajas e inconvenientes analizados anteriormente para un caso general de una etapa en serie, pueden ser generalizados para diferentes configuraciones serie – paralelo.

6.4.- Optimización del espacio ocupado en fabricación. Cambio de curvatura inicial y final.

En función de las dimensiones del resorte la fabricabilidad del mismo puede ser más o menos complicada. En epígrafes anteriores se ha analizado este aspecto, tanto con la configuración de la sección resistente y configuraciones serie – paralelo, que permiten adaptar las dimensiones máximas del resorte en función de las restricciones de diseño o de fabricación.

El cambio de curvatura es otro de los factores de diseño que limitan las dimensiones de los resortes. En el caso de no requerir espiras bloqueadas en la carcasa, una alternativa de mínimo espacio ocupado y reducir los procedimientos de montaje y fabricación, es imponer que la curvatura de fabricación del fleje sea igual a la de la carcasa para longitud cero y a la del árbol para longitud total. Esto permitiría el montaje sin compresión inicial y una fabricación con menores medios productivos y que serían los mismos para el fleje y la carcasa (en el caso de fabricarse en el mismo material).

Capítulo 7.- VALIDACIÓN EXPERIMENTAL.

Se exponen las diferentes etapas de experimentación llevadas a cabo para la validación del modelo teórico desarrollado en capítulos anteriores; con las diversas plataformas de validación, planes de ensayos y prototipos desarrollados. Ha sido construido un prototipo de bajo nivel; demostrador inicial del funcionamiento básico del sistema; previo a la fuerte inversión que supone un resorte de mayor capacidad de almacenamiento y el correspondiente banco de ensayos. Estudiada la viabilidad inicial del sistema, se han desarrollado dos resortes, uno de ellos de alta variabilidad del par y otro de baja variabilidad. Tiene el fin de validar tanto el modelo general, como el caso de resorte de curva generatriz clotoideal y rigidez a flexión que varía con la longitud del fleje. Ambos sistemas, tienen un esquema resorte – reductor – motor y periféricos de control, alimentación y captación de datos. Sin embargo la materialización de este esquema básico es diferente según el rango de funcionamiento del resorte. Para el primer y tercer resorte la aplicación de par es manual y el registro de datos mediante célula de carga y medición angular del giro, mientras que para el segundo el par es introducido y extraído mediante una cadena cinemática motor – reductor con registro de variables mediante electrónica de potencia y encoder.

7.1.- Prototipo de bajo nivel.

Con el fin de verificar la bondad del modelo se ha llevado a cabo la fabricación, montaje y ensayo de un prototipo inicial con resorte fabricado en acero. El resorte diseñado tiene únicamente el objetivo de analizar la viabilidad inicial del desarrollo, sin incurrir en mayores costes, como será realizado a posteriori con el empleo de materiales compuestos, por su mayor capacidad de almacenamiento de energía. Para el diseño de este resorte se ha empleado el desarrollo para curva generatriz clotoideal y variación de la rigidez a flexión con la longitud, debido a que se dispone de una expresión analítica que permite el análisis de los resultados alcanzados y agilizar la retroalimentación de los mismos.

El prototipo es fabricado con chapa de acero y elementos de fácil adquisición en el ámbito industrial, como son perfiles de aluminio o chapas de metacrilato. El resorte tiene forma trapezoidal de espesor constante 1 mm y dimensiones 0,05 x 0,5 x 5 m (coeficiente de variación de la rigidez a flexión a lo largo de la longitud de valor $\xi = -0,9$), con diámetros de carcasa de 0,20 m y árbol de 0,13 m. El par nominal es de 4 Nm con variabilidad del 5% (*Tabla 14*). La curva generatriz de fabricación es una clotoide con parámetro independiente $1,89 \text{ m}^{-1}$ y lineal $5,52 \text{ m}^{-1}$.

Tabla 14: Características del prototipo de bajo nivel.

Material	Módulo de Young	Tensión máxima admisible	Densidad	Energía almacenada
Acero al carbono	$21 \cdot 10^{10}$ Pa	$3,7 \cdot 10^8$ Pa	7.800 kg/m^3	$6,4 \cdot 10^{-3}$ Wh
Radio del árbol	Radio de carcasa	Longitud del fleje	Espesor	Altura árbol y carcasa
0,13 m	0,2 m	5 m	1 mm	0,5 m y 0,05 m
Par nominal	Variabilidad par	Curva generatriz	Parámetro a	Parámetro b
4 Nm	5%	clotoidal	$1,89 \text{ m}^{-1}$	$5,52 \text{ m}^{-1}$

El prototipo está constituido por un cilindro principal de 610 mm de altura con unión atornillada entre resorte y árbol. En la parte inferior se dispone de un tubo secundario de mayor diámetro, cuya funcionalidad es funcionar como cojinete. Tanto el cilindro como el cojinete van sustentados en placas bajo una estructura de perfiles angulares de acero. En la parte superior del prototipo, se dispone una llave carraca que funciona como antirretorno y permite introducir par al sistema. Debido al bajo par a aplicar al resorte su accionamiento y registro de resultados es manual. En los ensayos se mide la evolución del par con el ángulo girado, para lo cual se utiliza un dinamómetro calibrado colocado en el extremo de la barra de carga con medición estática de la fuerza ejercida tanto en carga como en descarga. Teniendo en cuenta la distancia del dinamómetro al eje de giro se puede calcular el par al que está sometido.

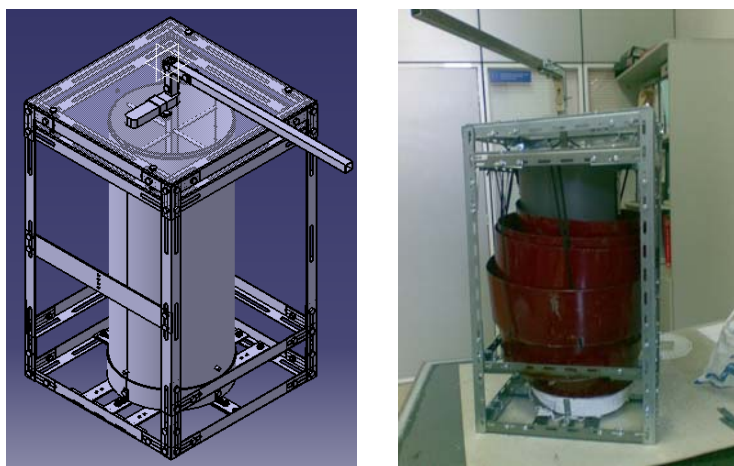


Figura 84. Diseño CAD y fabricación del prototipo de bajo nivel.

En la Figura 85 se observa la existencia de una zona de baja variabilidad de par. Sin embargo existe diferencia entre el modelo teórico y el ensayado, debido intrínsecamente al propio diseño del sistema: rozamiento entre parte móviles mal ajustadas, altas tolerancias por el proceso de fabricación, posibles errores en la adaptación del fleje a la forma geométrica exacta del resorte, errores generados en la medición por el uso de una célula de carga de resolución mínima 50 gramos... Dentro de los efectos mencionados, el de la lubricación ha sido eliminada en el ensayo mostrado al realizarse un ensayo de rozamiento sin tensión en el resorte mediante su desconexión.

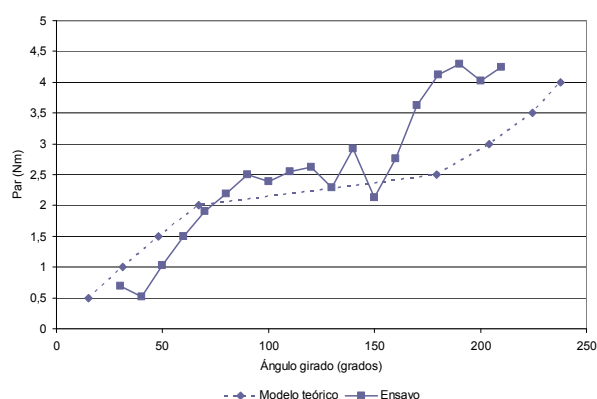


Figura 85. Resultado del ensayo del prototipo de bajo nivel.

A pesar de todas las fuentes de incertidumbre y de las diferencias entre el modelo y el ensayo, el prototipo cumple la misión para la cual fue desarrollado, ya que se observa la existencia de una zona de baja variabilidad del par.

7.2.- Resorte espiral a torsión de baja variabilidad del par.

Con los ensayos realizados en el primer prototipo (ensayo de carga y descarga básicamente) se vislumbra la viabilidad inicial del desarrollo al existir una zona de baja variabilidad del par. Se realiza así una primera aproximación a la validación del modelo, que tendrá que ser corroborada mediante las simulaciones y ensayos en prototipos monitorizados de mayor nivel que se muestran a continuación.

El resorte empleado para el análisis y validación de la teoría planteada para par de baja variabilidad será el desarrollado en el Capítulo 5. Sus principales características son las que aparecen en la siguiente *Tabla 15*:

Tabla 15: Características del prototipo de resorte de baja variabilidad del par.

Material		Módulo de Young	Tensión máxima admisible	Densidad
Fibra vidrio HP unidireccional		$4,58 \cdot 10^{10}$ Pa	$7 \cdot 10^8$ Pa	1820 kg/m^3
Radio del árbol	Radio de carcasa	Longitud del fleje	Espesor	Altura árbol y carcasa
0,24 m	0,29 m	10 m	7,8 mm	0,874 m y 1,135 m
Par nominal	Variabilidad par	Curva generatriz	Parámetro a	Parámetro b
5.000 Nm	5%	clotoidal	$0,17 \text{ m}^{-1}$	$1,71 \text{ m}^{-1}$

7.2.1.- Simulación mediante elementos finitos.

Se han realizado los análisis necesarios para la validación del modelo matemático desarrollado. Por un lado se han implementado las ecuaciones mediante un programa de análisis numérico con el fin de obtener ábacos de diseño para la fabricación de resortes. Por otra parte se han realizado simulaciones mediante cálculo por elementos finitos teniendo en cuenta que el resorte se comporta como una viga curva de rigidez a flexión variable con grandes deformaciones.

Para dichos análisis se ha discretizado la longitud total del fleje con características diferentes de inercia y modulo de elasticidad. La unión a la carcasa en el proceso de carga es modelada mediante un empotramiento y la unión al árbol con una barra de rigidez equivalente sobre la que se aplica el par nominal. En el rango de funcionamiento, una vez se dispone del resorte en su alojamiento, se realiza el análisis con un modelo de eje apoyado libre y carcasa empotrada. Dicho sistema hiperestático puede ser analizado mediante la superposición de dos casos de carga, uno empotrado libre a par nominal y otro empotrado con las fuerzas en direcciones horizontal y vertical que impiden el desplazamiento del eje. Durante dichos procesos, se considera un modelo de grandes desplazamientos con no linealidades bajo criterios de convergencia prefijados. La convergencia es facilitada mediante la creación de dos fuerzas locales en la aplicación del par de igual valor y sentido contrario.

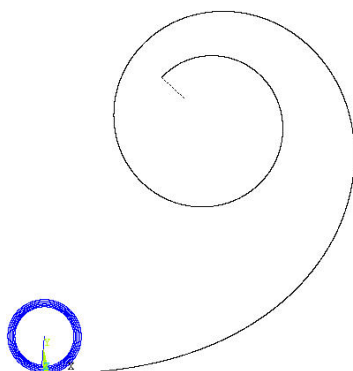


Figura 86. Resorte de fabricación y deformada a par nominal.

Mediante este modelo se ha comprobado la deformada del resorte a par nominal así como su rango de variabilidad. Se ha comprobado que la deformada obtenida es análoga mediante el cálculo teórico, asumiendo un error de convergencia del 5% tanto en la fuerza como en el desplazamiento y de un error del 0,5% en el par.

El modelo también permite realizar el cálculo del posicionamiento de las diferentes espiras del resorte en los distintos estados de carga. En la Figura 87 se comprueba la deformada del resorte a par nominal.

En las simulaciones planteadas (*Figura 87* y *Figura 88*) se comprueba la constancia de esfuerzos flectores y esfuerzos cortantes despreciables, observándose la validez de hipótesis de constancia del par a lo largo de toda la longitud del fleje. Como se puede observar en las simulaciones, la tensión alcanzada en el resorte diseñado respecto a la máxima admisible especificada proporciona, a par nominal, un coeficiente de seguridad en el diseño de 1,25.

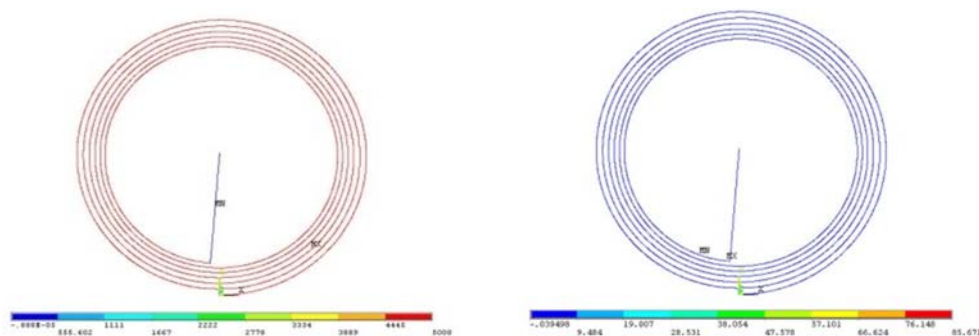


Figura 87. Flectores y esfuerzos cortantes.

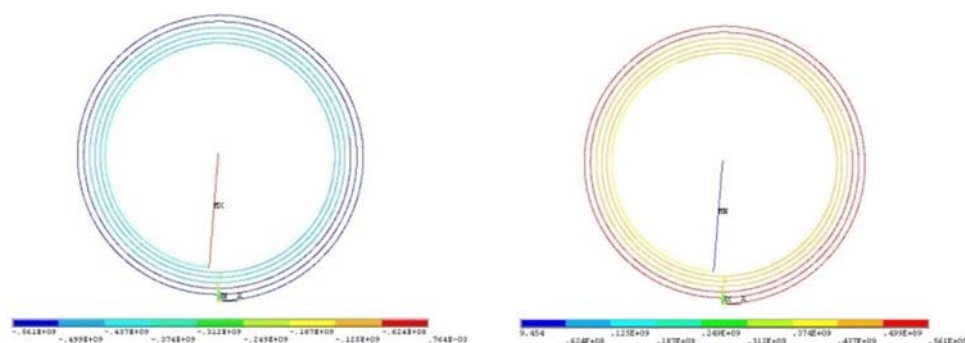


Figura 88. Máxima tensión a flexión y máxima tensión.

La modelización también sirve para calcular la unión del resorte con el árbol y con la carcasa. La unión con el árbol será realizada mediante el enrollamiento de una vuelta y media del fleje sobre el mismo, previamente moleteado y tratado con adhesivo, al comprobarse que dicha longitud es suficiente para soportar los esfuerzos máximos en funcionamiento y evitar la posible delaminación del material que generaría la separación entre el árbol metálico y el fleje de material compuesto. Por su parte la unión con la carcasa es realizada mediante un gancho en el extremo del resorte, fabricado en el mismo material que este. Dicha unión es fijada por medio de tres chapas atornilladas que compactan entre si el extremo del resorte, como será calculado posteriormente. Este doble sistema de seguridad proporciona que el par máximo soportado por

el extremo sea muy superior al máximo de funcionamiento. Dicho margen de seguridad es necesario ante posibles picos de par en el proceso de montaje generado por choques o rozamiento seco entre espiras.

7.2.2.- Fabricación.

Para la fabricación del resorte, se van a emplear nueve capas de fibra de vidrio HP unidireccional, las cuales se extiende con la geometría adecuada (al tener forma espiral, la curvatura va a implicar que cada una de las capas del fleje tengan diferentes medidas), sobre una superficie plana, y se procederá a impregnarla con resina epoxy. Tras la adición de la resina las capas se recubren con plástico protector y son curadas a temperatura ambiente durante doce horas aproximadamente para lograr la gelificación de la resina.

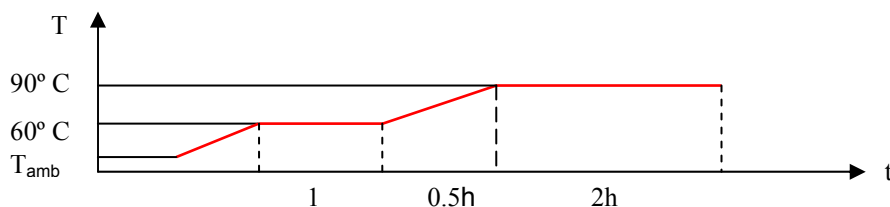


Figura 89. Perfil de temperaturas para el curado del resorte.

Pasado dicho tiempo, se procede a dar forma el resorte, para ello, se colocan las capas alrededor del árbol, para continuar posicionando las diferentes capas en el molde metálico diseñado con la geometría de fabricación del resorte. Cuando todas las capas están situadas en el molde, se instalará el contra molde, de tal manera que entre ambas piezas se ejerza presión necesaria para un curado correcto de las capas de material compuesto.



Figura 90. Pegado de la primera y de las siguientes capas de fibra de vidrio sobre el molde.

Para garantizar el correcto desmolde del resorte, se aplica desmoldeante tanto en el molde como en el contra molde. Una vez el resorte se ha introducido entre el molde y el contra molde, se debe proceder al

curado del mismo. Para ello se introduce toda la estructura en un horno con las dimensiones suficientes para el proceso de curado propiamente dicho, que constará de dos etapas (*Figura 89*). La primera de ellas requiere una subida lineal de temperatura de $1^{\circ}\text{C}/\text{min}$ desde temperatura ambiente hasta 60°C manteniendo esta temperatura durante una hora. En la segunda etapa, la temperatura subirá de 60°C a 90°C a la misma velocidad, manteniéndose esa temperatura durante dos horas. Una vez curado se procede al desmoldeo del resorte y mecanizado de las aristas cortantes y posibles imperfecciones si existiesen.

Extraído el fleje del molde se deben comprobar las correctas dimensiones del mismo y los posibles desperfectos en el material, como podrían ser problemas en la impregnación o delaminaciones de los bordes de la pieza. Si estos defectos fuesen importantes se requeriría el rechazo de la pieza. En la fabricación del prototipo solo se han encontrado exceso de resina en los extremos del resorte que han obligado al recorte con medios mecánicos.



Figura 91. Molde y resorte fabricado.

7.2.3.- Diseño de la instalación de ensayos para validación del modelo.

La función global del banco de ensayos consiste en caracterizar el comportamiento del resorte tanto en el proceso de carga como en la descarga (*Figura 92*). Conjuntamente con el resorte, cuyas características han sido descritas anteriormente, se requiere disponer de un grupo de potencia encargado de entregar energía que deforme el resorte y recibir la energía elástica de deformación del mismo en el proceso de descarga.

El grupo seleccionado es el constituido por un motor eléctrico (dadas sus características de rendimiento, coste, mantenimiento y prestaciones) que pueda funcionar también como generador (al conseguirse así mayor sencillez del banco de ensayos y reducir el tamaño del montaje, ahorrando materiales y elementos constructivos) y una reductora de velocidad (la cual debe ser reversible como el motor, con lo que el dentado de los engranajes debe ser recto). Adicionalmente, para reducir la potencia del motor - generador, el reductor deberá de tener una gran relación de reducción, por lo que para dichas características, conjuntamente con la gran fiabilidad y funcionamiento discontinuo requerido, se selecciona un tren epicicloidal. El control de

pares y velocidades de giro del grupo de potencia será realizado por la electrónica de potencia, la cual deberá actuar como sistema de control y seguridad ante posibles fallos.

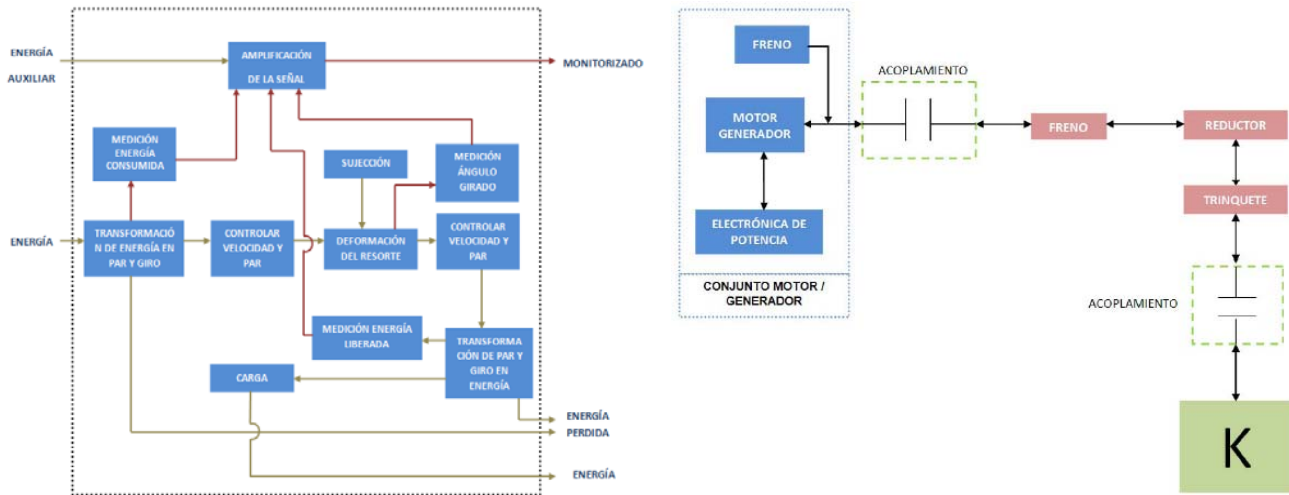


Figura 92. Diagrama de funciones principales del banco de ensayos.

Adicionalmente a la electrónica de potencia, se instala un freno como elemento de control y seguridad mecánica. Estará situado entre el motor y el reductor con accionamiento tanto manual, para detener el árbol en situaciones de emergencia, como automático en función del número de revoluciones, en caso de corte en el suministro eléctrico, en el que el motor - generador dejase de ofrecer par resistente y se produjera el embalamiento del árbol. Las uniones entre freno y motor así como entre reductor y resorte se realizará con acoplamientos flexibles que permitan la absorción de desviaciones o vibraciones en servicio.

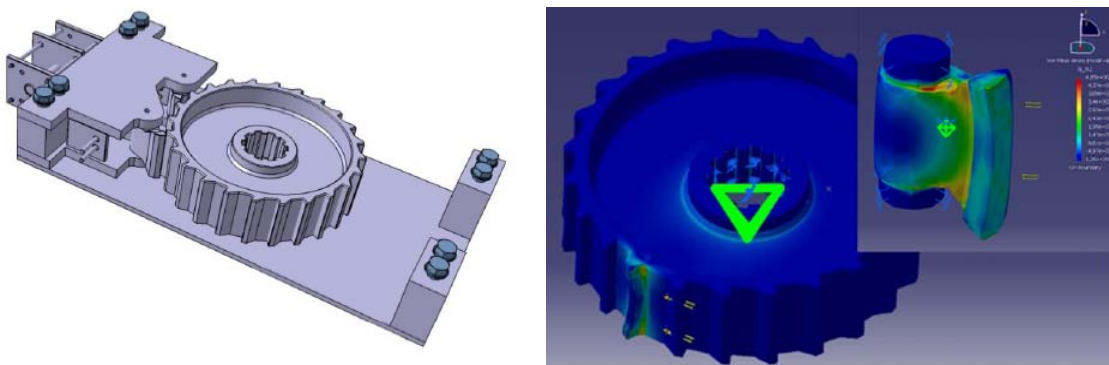


Figura 93. Trinquete de seguridad del resorte (diseño, cálculo y fabricación).

Otro de los sistemas de seguridad mecánico instalado es un trinquete a la salida de la reductora en su unión al árbol. Con el trinquete se impide que el resorte gire en el sentido de descarga de forma involuntaria

y descontrolada. Se instalará colgando de la bancada de ensayos, de manera que el nervado del árbol del resorte encaje con el alojamiento hembra de su disco. En la *Figura 93* se observa tanto el diseño geométrico del trinquete de seguridad con su accionamiento, como el diseño y cálculo del elemento crítico de seguridad, en este caso el contacto entre el diente de la rueda y el del freno.

Todo el sistema va a ir instalado bajo un bastidor de fijación y regulación relativa de los componentes principales, formado por perfiles de acero soldado y atornillado. Para garantizar la correcta unión entre este subconjunto y el resorte se fabrica el extremo del resorte con forma de *S* para garantizar el encaje de ambos componentes y conseguir el empotramiento del resorte (*Figura 94*). Esta pieza, además de soportar grandes esfuerzos, debe permitir el deslizamiento del resorte en los procesos de montaje y desmontaje, y además, garantizar el empotramiento en funcionamiento. Para ello se han dispuesto tres chapas verticales con la intermedia de ellas fija al bastidor, que hace que el conjunto se encuentre solidario a este. La chapa interior puede aflojarse permaneciendo unida al resto del subconjunto empotramiento pero dejando que el resorte se deslice entre esta y la intermedia. La chapa exterior sirve de fijación en el funcionamiento de las otras dos con el resorte incrustado entre ambas.

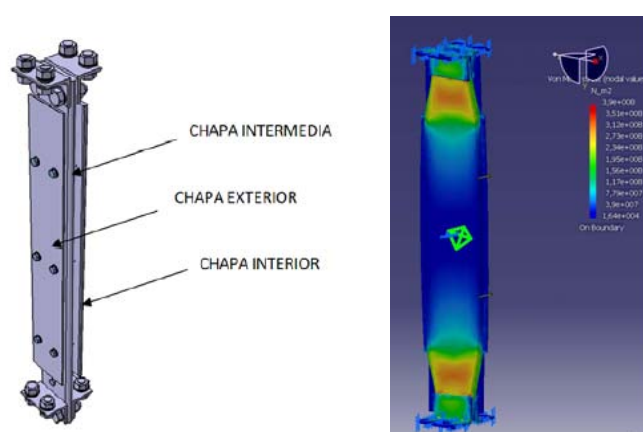


Figura 94. Soporte del extremo del resorte en la carcasa.

El conjunto mecánico descrito anteriormente se encuentra enmarcado dentro de un sistema electromecánico que engloba todos los componentes controlados y accionándose de manera eléctrica y electrónica (*Figura 95*). Los componentes más importantes del conjunto son la instalación eléctrica, el sistema de seguridad y control del prototipo. El sistema eléctrico está diseñado para alimentar tanto el conjunto moto-generator como todos los sistemas auxiliares. Este sistema es el encargado de suministrar la energía al resorte en carga y de devolver la energía almacenada al consumidor o a la red en la descarga (en el caso de los ensayos realizados se va a devolver a la red a través de la electrónica de potencia, que va a permitir controlar la descarga). Para que esta segunda operación sea viable es necesaria la instalación de una

fuelle de alimentación regenerativa. Por cuestiones de seguridad el sistema eléctrico es supeditado al sistema de control con el fin de evitar que un fallo en cualquier componente del prototipo derive en un accidente eléctrico y a la inversa.

El sistema eléctrico instalado se emplea para alimentar el conjunto motor-generator y los sistemas auxiliares. Es el encargado de suministrar energía al resorte cuando es necesario, y de devolverla a la red cuando se libere la energía acumulada. El motor empleado es trifásico de corriente continua asíncrono con rotor cortocircuitado de jaula de ardilla, su par y velocidad nominales son de 300 Nm y 1.000 rpm.

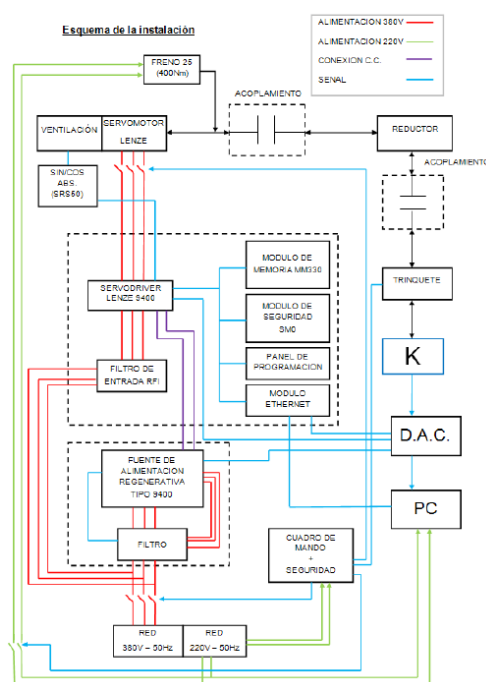


Figura 95. Esquemas de la instalación eléctrica y de control del banco de ensayos.

El motor tiene acoplado un freno electromecánico normalmente cerrado con el sistema en reposo, que se emplea para realizar frenados dinámicos y para mantener el sistema parado en estacionamiento, función en la que sirve de complemento al trinquete de seguridad. El par resistente máximo que puede ejercer es de 500 Nm. Así mismo, el motor cuenta con un sistema de ventilación forzada, para garantizar el correcto funcionamiento del mismo durante periodos prolongados.

Conjuntamente con el motor se ha instalado un variador de frecuencia que controla el par y la velocidad del servomotor. Lleva acoplado un filtro para evitar la entrada de ruido procedente de la red. Dispone además de un módulo para extraer señales digitales y analógicas, que permiten tanto obtener datos para monitorizar los ensayos, como información para conocer en todo momento el estado del sistema.

Tabla 16: Parámetros y sensores empleados en la instalación de ensayos.

Parámetro	Sensor empleado
Posicionado del árbol	Sensor de velocidad y desplazamiento angular (SIN/CON absoluto incorporado al servomotor).
Par	Sensor de par instalado entre el servomotor y la reductora.
Tensión en el resorte	Galgas extensiométricos unidireccionales.
Mediciones electrotécnicas	Sensores de monitorización incorporados en los sistemas eléctricos adquiridos (motor, variador...).

La fuente regenerativa que posibilita se inyecte a la red la energía regenerada por el resorte, con una potencia máxima de hasta 11,1 kW. Para gobernar todos los equipos, se ha instalado un cuadro eléctrico que contiene todos los elementos necesarios para proteger, tanto a la instalación como a las personas: automáticos, diferenciales, fusibles, convertidor C.A. 220V – D.C. 24V...El PLC recibe las señales procedentes, del variador de frecuencia, fuente regenerativa y equipos auxiliares (sensor de par, accionamiento del trinquete, freno, ...) y permite conocer en todo momento el estado de funcionamiento del sistema; además es capaz de realizar paradas de emergencia automáticas en caso de fallo de la instalación.

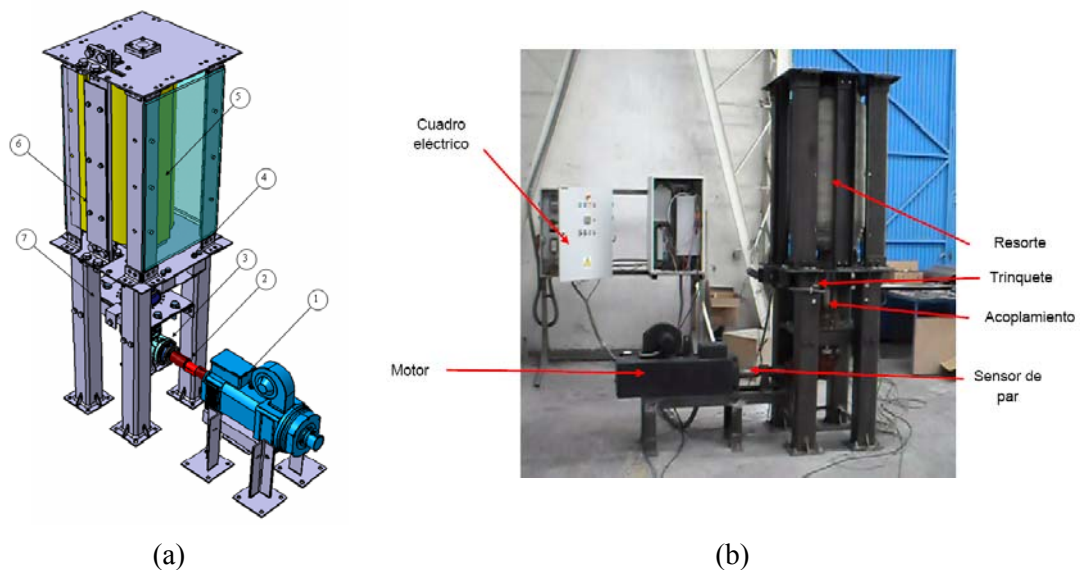


Figura 96. Diseño del banco de ensayos.

Dentro del sistema de control, el nivel de seguridad del conjunto se determina por el número de fallos necesarios para que se alcance una situación de peligro. Cuanto menor sea dicho número mayor será el grado de peligro, por lo que se determinan, diferentes niveles de riesgo. En el nivel 0 no existe posibilidad de causar daños a personas - objetos, en el nivel 1 el fallo simultáneo de tres sistemas de seguridad puede

provocar daños a personas - objetos, en el nivel 2 el fallo simultáneo de dos sistemas de seguridad puede provocar daños a personas - objetos, en el nivel 3 el fallo simultáneo de un sistema de seguridad puede provocar daños a personas - objetos, y finalmente en el nivel 4 se debe detener el sistema. En estos niveles está basado el sistema de control que dispone de las siguientes señales de entrada: trinquete abierto y cerrado, soporte extremo muelle cerrado, freno, motor, generador y valor límite de la velocidad, aceleración y tensión empleados en el desarrollo del prototipo de ensayo (Tabla 16).

La plataforma de validación para el resorte de baja variabilidad de par desarrollado, constituido por los elementos diseñados y seleccionados anteriormente, se observa en la *Figura 96 (a)* a través de su diseño asistido por ordenador, donde el motor viene representado por el índice 1, el acoplamiento motor-reductora 2, la reductora 3, la bancada 4, el árbol del resorte 5, la fijación del extremo del fleje 6 y el trinquete de seguridad 7, como principales componentes de la instalación. Por otra parte en la *Figura 96 (b)* se observa la fabricación del sistema y montaje real del conjunto diseñado.

7.2.4.- Diseño y planificación de ensayos.

El resorte espiral a torsión es sometido a un conjunto de ensayos para caracterizar su comportamiento. El primer gran conjunto de ensayos a los que se va a someter al prototipo son los de recepción de los componentes, tanto fabricados ex proceso (árbol, bastidor, trinquete...) como comerciales (motor, reductora...), donde se comprobará que han sido fabricados según especificaciones y que sus características técnicas son las requeridas. Una vez analizados los elementos por separado se realizan los ensayos de funcionamiento en conjunto y control previo de integración de sistemas,

- Ensayo de cadena cinemática: comprobación de que el motor, acoplamientos, reductora y chasis acoplan de forma correcta y permitir el giro sin carga con el resorte desmontado.
- Ensayo de seguridad electromecánica del cuadro de control: comprobación del correcto funcionamiento del cuadro de seguridad y control del sistema ante la simulación de los fallos del sistema, así como de los sensores de final de carrera.

Todos los ensayos anteriores, han sido realizados de manera previa a los ensayos de introducción del resorte en su alojamiento (análisis de deformación del mismo) y de comportamiento (obtención de la curva par – ángulo girado tanto en proceso de carga como en descarga y análisis energético) dando un resultado satisfactorio, por lo que se continúan con el resto de los ensayos. Se desarrollan pormenorizadamente a continuación como medio de análisis de la teoría planteada, siendo de forma resumida los siguientes:

- Ensayo de comportamiento, carga y descarga del resorte.

- Ensayo de análisis de tensiones.
- Análisis de repetibilidad de resultados y plausibilidad modelo - ensayo.

Diferencias entre el diseño especificado y el prototipo fabricado.

Se compara el diseño especificado y el prototipo fabricado con objeto de dejar patentes ciertas diferencias que van a tener crucial importancia e influencia en los ensayos llevados a cabo. Las principales diferencias son las siguientes:

- Módulo de elasticidad. El módulo con el que se realizó el diseño del prototipo era de 45 GPa, correspondiente a un porcentaje en volumen de fibra del 60%, datos facilitados por el fabricante. No obstante, en la fabricación se obtuvo un porcentaje menor, siendo además la resina utilizada más flexible, por lo que el módulo se vio reducido, alcanzándose un valor de 30 GPa según ensayos.
- Espesor de la viga. El espesor nominal con el que se realizó el diseño de la viga era de 7,8 mm, constante a lo largo de la longitud del fleje. Sin embargo las mediciones realizadas muestran que el espesor medio es de 9 mm, oscilando entre 8 mm en algunas secciones, y 13 mm en las zonas de conexión al árbol y la carcasa. Este hecho reduce el espacio disponible entre árbol (el fleje da 6,5 vueltas sobre este cuando está bloqueado) y carcasa (dando 5,5 vueltas al estar bloqueado en la carcasa). Esto implica una reducción de diámetro de la carcasa sobre el teórico de 23,6 mm, y un aumento de diámetro del árbol de 26 mm, la disminución total de espacio es de 59,6 mm. Este hecho ha obligado a aumentar el diámetro de la carcasa hasta un valor de 64 mm.
- Rigidez a flexión de la viga. La viga fabricada es un 2% más rígida, al compensarse la disminución de rigidez, por el menor módulo de elasticidad, con la mayor rigidez por el aumento de espesor.
- Radio del árbol. Para asegurar el correcto pegado del resorte con el árbol, se dio una vuelta adicional al resorte respecto a la especificada. Esto implica que el radio del árbol pasa a ser de 24,9 mm en lugar de los 24 mm de diseño.

Ensayo de montaje del resorte.

El objetivo de este ensayo es el control y monitorización de las tensiones y deformaciones que sufren determinadas partes de la estructura exterior o carcasa del prototipo durante el montaje y pre-enrollamiento del resorte dentro de la bancada. En esta operación estará conectada la cadena cinemática y no el extremo exterior del resorte. Se debe accionar lentamente el motor en el proceso de montaje y fijación exterior del

mismo, ya que puede ocasionar el roce de la fibra del resorte contra los pilares y demás componentes de la carcasa. Con este ensayo los parámetros a medir son la deformación del resorte y el número de espiras bloqueadas así como las posibles tensiones y deformaciones del conjunto resorte - carcasa.

El montaje del resorte en su alojamiento permite comprobar que su deformación bajo el par de montaje, es análoga a la definida por el modelo matemático. Las diferencias estriban tanto en el acabado superficial y los altos márgenes de tolerancias superficiales que conlleva el proceso de fabricación empleado. La medición de los espesores del fleje permiten comprobar que existe ciertas secciones, con una distribución no uniforme, con espesor de hasta 14 mm, siendo lo nominal 7,8 mm, generándose un exceso de espesor máximo de 25% sobre el nominal, debido al proceso de fabricación empleado.

Se comprueba que ni la superficie del resorte ni de la bancada de pruebas ha sufrido ni tensiones ni deformaciones por encima de las de diseño y que tampoco existe ningún hecho relevante de mención en lo relativo al gancho de unión del resorte a la estructura.

Ensayo de comportamiento (carga - descarga).

El objetivo de este ensayo es proceder a la carga y descarga del resorte una vez montado en el interior de la carcasa. Se compara la curva característica par - ángulo girado con la estimada por el modelo teórico planteado. La curva teórica del modelo desarrollado ha sido corregida debido a las modificaciones derivadas de la fabricación, como se ha indicado anteriormente, principalmente disminución del módulo de elasticidad y aumento del espesor del fleje. Se comprueba que el orden de magnitud y los valores extremos son coherentes con el modelo desarrollado (*Figura 97*). Las fluctuaciones en la curva característica deben atribuirse al espesor no constante y excesivo.

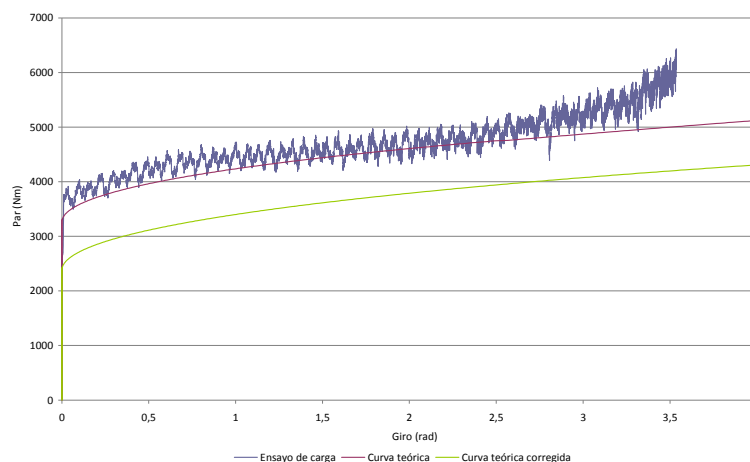


Figura 97. Comparación curva característica en proceso de carga.

Ensayo de carga del resorte.

Para realizar este ensayo, por motivos de seguridad se actúa sobre el variador mediante control de velocidad. Se impone al motor una velocidad constante objetivo, dando el par necesario en cada momento para lograrlo. Durante los ensayos se monitorizan, además del par, el giro del resorte; así como potencias, velocidad del motor. La energía empleada se puede obtener integrando a lo largo del tiempo la potencia del motor. Se puede cargar el resorte a la velocidad que se desee, por seguridad se hace que el valor sea bajo, entre 15 y 50 rpm en el árbol de salida del servomotor, 0,15 y 0,50 rpm en el árbol del resorte.

Existen ligeras diferencias entre los valores ensayados y los obtenidos por el modelo teórico, siendo mayor el valor de par ejercido para cargar el resorte. Indicar la existencia de pérdidas en el proceso de carga, debidas a rozamientos y la posible desalineación a lo largo de la cadena cinemática. La ondulación de los valores medidos se debe a los rozamientos como consecuencia de la desalineación entre los árboles de salida del motor y de la entrada de la reductora

Energía medida en el ensayo y calculada con el modelo teórico.

Se comprueba que a partir de un ángulo girado de 3,3 rad, se produce el bloqueo de la totalidad de las espiras y el par se incrementa exponencialmente. A partir de ese momento, la energía introducida en el resorte no es realmente energía útil, sino que se emplearía en sobrecargar las fibras a tracción. Integrando la curva de par medido a lo largo del giro del resorte, se comprueba que la energía introducida es de 4,22 Wh.

El modelo que no tiene en cuenta el espesor del fleje predice un valor de 17 Wh a par constante; mientras que mediante el modelo que tiene en cuenta el espesor predice 3,55 Wh. Dicha diferencia respecto al valor ensayado de 0,7 Wh no se debe únicamente a la no consideración del espesor sino que también es debido a las modificaciones en los radios. Dicha diferencia es debida a los siguientes factores:

- El modelo teórico, con valor medio de espesor de fleje de 7,8 mm, tiene valores locales considerablemente diferentes hasta valores de 14 mm, predice un giro máximo de aproximadamente 3 rad, este valor es menor que en el modelo en el que no se tiene en cuenta el espesor. Sin embargo en el ensayo realizado se alcanzó un giro de 3,4 rad. La energía correspondiente a 0,4 rad (0,56 Wh) no es energía útil, ya que las espiras del resorte ya están bloqueadas, sino que se emplea en sobrecargarlo. Esto se observa en el cambio de pendiente de la curva par - ángulo girado a partir de 3 rad.
- Las pérdidas de la cadena cinemática son las siguientes, el rendimiento del reductor, al ser epicicloidal y con etapa cónica es de aproximadamente de un 95%, el de los acoplamientos un 99%,

y el de los rodamientos prácticamente 100%. Resulta un rendimiento total de la cadena cinemática del 94%. Por tanto la energía perdida puede cuantificarse como 0,25 Wh (respecto a los 4,22 Wh).

Así, con las pérdidas anteriores debidas al espesor y el rendimiento de la cadena cinemática respectivamente de 0,56 Wh y 0,25 Wh, se dispone de una energía de 3,41 Wh, que coincide prácticamente con el valor dado por el modelo teórico 3,55 Wh, con lo que el error cometido es del 3,9%.

Ensayo de análisis de tensiones.

El ángulo girado debido al efecto del espesor de las espiras es 2,7 radianes menor que el teórico a par nominal, dicha disminución, así como la energía almacenada, es debido a que las diferentes secciones del fleje no experimentan el cambio de curvatura para el que estaban diseñado. Para demostrar este planteamiento, se pasa a describir el comportamiento de una de las secciones resistentes, situada a 5 metros del origen donde se ha instalado una galga extensométrica.

En dicha sección, el espesor del fleje es de 8,6 mm y la altura de 1 m, por lo que la rigidez a flexión es de 1.601 Nm^2 , la curvatura de fabricación de $1,025 \text{ m}^{-1}$ y la curvatura cuando está bloqueado en la carcasa de $3,37 \text{ m}^{-1}$ en lugar de $3,13 \text{ m}^{-1}$ si no se tuviera en cuenta el espesor del fleje. Esto implica una variación de cambio de curvatura desde $3,38 \text{ m}^{-1}$ hasta $1,025 \text{ m}^{-1}$ con una rigidez de 1.835 Nm^2 , con lo que el par de desbloqueo es 3.754 Nm, en lugar del cambio desde $3,13 \text{ m}^{-1}$ a $1,025 \text{ m}^{-1}$ con la misma rigidez que da un par de 3.370 Nm, esto es un par alcanzado de 384 Nm mayor. Este hecho se comprueba porque el incremento de deformación en la sección no comienza hasta que el giro en el árbol alcanza aproximadamente un valor de 0,9 rad, punto en el cual el par medido en el árbol del resorte es de 4.300 Nm. Obsérvese que el par del resorte es de 4.042 Nm (se parte de 4.300 Nm con un error del 6%). El par teórico es 37,54 Nm con lo que el error cometido es del 7%.

Por otra parte, la curvatura de dicha sección cuando está bloqueada en el árbol con efecto del espesor es, $3,647 \text{ m}^{-1}$, respecto a los $4,17 \text{ m}^{-1}$ si no se tuviera en cuenta. El par a esa curvatura será, teóricamente, de 4.202 Nm (cambio de curvatura desde $1,025 \text{ m}^{-1}$ a $3,65 \text{ m}^{-1}$ con rigidez de 1.601 Nm^2), en lugar de los 5.035 Nm (cambio de curvatura desde $1,025 \text{ m}^{-1}$ a $4,17 \text{ m}^{-1}$ con rigidez de 1.835 Nm^2), es decir, 833 Nm menor. Teniendo en cuenta el rendimiento, el par teórico sería 4.800 Nm; por lo que existe un error del 12%. Ese cambio de curvatura real de $0,37 \text{ m}^{-1}$ (desde $3,647 \text{ m}^{-1}$ hasta $3,37 \text{ m}^{-1}$), correspondiente a un par útil de 443,5Nm (cambio curvatura $0,277 \text{ m}^{-1}$ y rigidez a flexión 1.601 Nm^2), en lugar de los 1.665 Nm (cambio de curvatura $1,04 \text{ m}^{-1}$ y rigidez a flexión 1.601 Nm^2). El par útil en esta sección es aproximadamente 1.221,5 Nm menor, con el consiguiente decremento en la energía elástica almacenada en ella, que se traduce en una menor contribución al giro del árbol, por tanto, un giro total menor de éste.

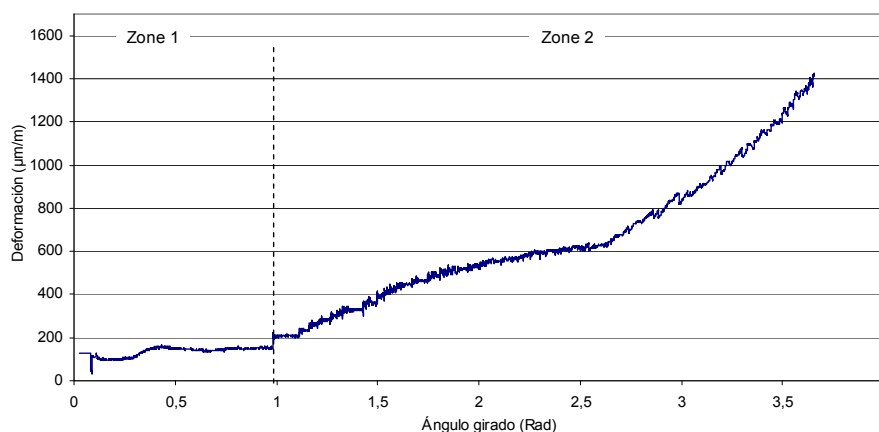


Figura 98. Tensión en la galga situada a 5m de la carcasa.

La galga extensométrica corrobora estos resultados, debido a que dicha sección sufre un cambio de curvatura de $0,277 \text{ m}^{-1}$, que corresponde a una deformación de 1.191 microdeformaciones, (aproximado a la lectura de la galga, 1.000 microdeformaciones).

Así mismo en la gráfica del ensayo (*Figura 98*) se observan dos zonas diferenciadas, correspondientes a una tensión constante y a otra creciente. Esto es debido a que la sección se encuentra bloqueada en la carcasa hasta un ángulo girado de 1 rad, tras el cual la sección ya no está bloqueada y su deformación crece de forma proporcional al par aplicado.

Ensayo de descarga del resorte.

Para realizar este ensayo, se actúa sobre el variador de velocidad del motor mediante control de par. Se impone un par resistente que el motor debe oponer a la descarga del resorte y también se marca un límite en la velocidad. Variando el par resistente del motor se pueden obtener distintas potencias de descarga. A la hora de medir el par en los ensayos de descarga, no se puede utilizar el sensor de par al no ser reversible; por lo que se empleará la información proporcionada por el motor. A continuación se presenta la curva de par resistente del motor con una consigna de par 15 Nm y velocidad límite de 100 rpm en el motor.

Se observa que el par resistente medio es de aproximadamente 15 Nm, donde las fluctuaciones entorno a dicho valor son consecuencia del control efectuado por la electrónica de potencia para que la velocidad no sobrepase la referencia marcada. Si se sobrepasa el límite, el par resistente del generador aumentaría hasta frenar al resorte, disminuyendo después hasta que se vuelve a alcanzar la velocidad límite.

En cuanto a la potencia medida en el motor - generador, en primera instancia se observa que la gráfica obtenida tiene una forma coherente con la curva de par permaneciendo prácticamente constante durante 1,5 rad para descender posteriormente con pendiente decreciente.

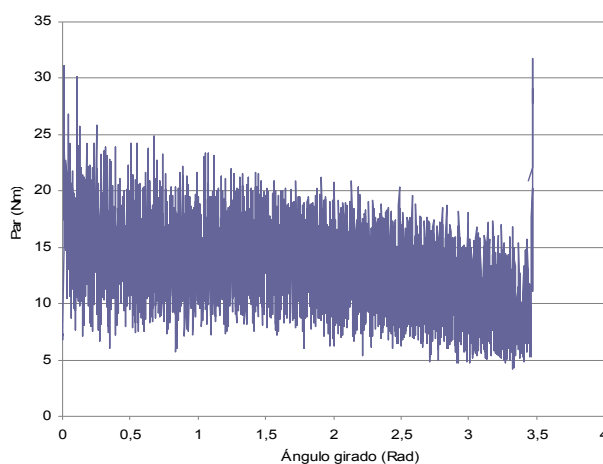


Figura 99. Par de descarga.

Integrando la curva de potencia a lo largo del tiempo, se obtiene que la energía extraída alcanza los 3,30 Wh. Hay que descartar pérdidas por histéresis o relajación, dado que no existen diferencias entre la posición angular inicial del resorte antes de aplicar carga, y después de descargarse, y entre los pares medidos para la misma posición angular en diferentes ensayos. Este hecho ha sido comprobado por medio de la realización de marcas en cada una de las espiras del resorte cuando éste estaba totalmente cargado, es decir, bloqueado en el árbol. Dichas marcas se alineaban en todos y cada uno de los procesos de carga.

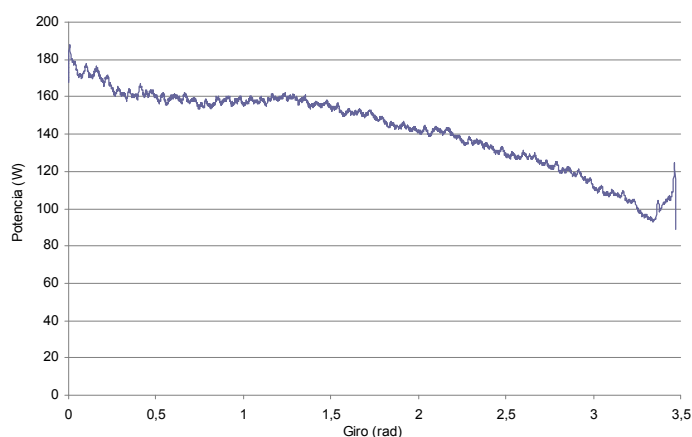


Figura 100. Potencia de descarga.

Adicionalmente, se ha realizado un ensayo de relajación sencillo, que consistía en cargar el resorte hasta el bloqueo. Para permitir el movimiento de las espiras se abrió el trinquete de seguridad, quedando cerrado el freno de servicio en el lado de bajo par. Posteriormente se dejó el resorte en esta posición durante 72 horas, y tras lo cual se comprobó que no se había producido movimiento relativo entre las marcas, por lo que no había existido relajación de las espiras.

Las pérdidas por viscoelasticidad también se consideran despreciables, dada la bajísima velocidad de cambio de curvatura impuesta en los ensayos. Los materiales compuestos presentan un valor bajo del coeficiente de pérdidas η , que representa la relación entre la capacidad de disipación de energía del material, dividida por su capacidad para almacenar energía de manera reversible. Así cuanto más bajo sea el valor de este factor, menores serán las pérdidas por efecto viscoelástico. La *Figura 101* muestra la relación entre el factor de pérdidas y la rigidez para distintos materiales [Ashby, 1999]. Se observa, que para los materiales compuestos reforzados con fibra de vidrio, el coeficiente de pérdidas viscoelásticas oscila entre 10^{-2} y 10^{-3} , por lo que dicho efecto puede considerarse despreciable respecto al resto de pérdidas mecánicas descritas.

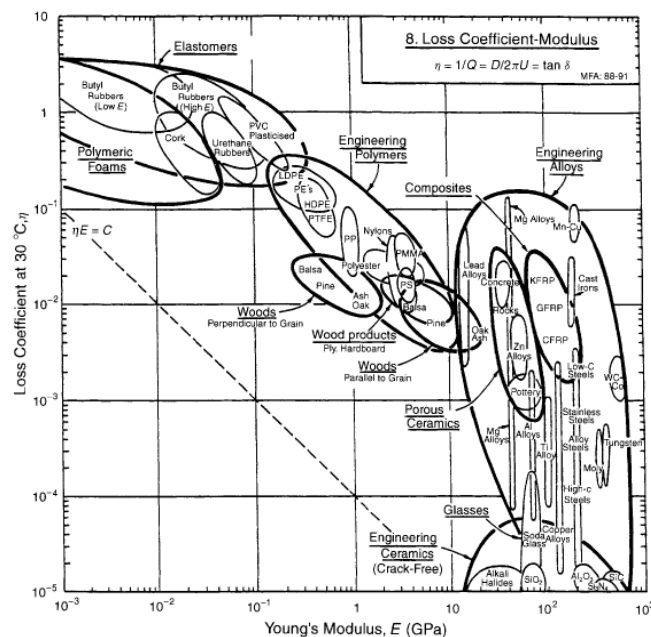


Figura 101. Pérdidas por viscoelasticidad en diferentes materiales [Ashby, 1999].

Comprobación adicional de plausibilidad modelo-ensayo.

Los ensayos por control de par, también sirven para verificar el modelo teórico planteado, gracias a las medidas de aceleraciones. El motor ejerce en los primeros instantes un par resistente de 7 Nm lo que permite

que la cadena cinemática se acelere hasta 100 rpm en aproximadamente 0,11 segundos. Bajo estas condiciones el resorte es capaz de acelerar al motor con una aceleración de 1.000 rpm/s.

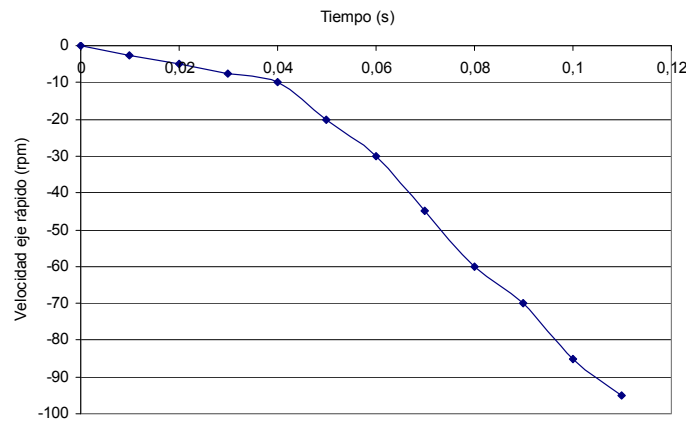


Figura 102. Relación entre la velocidad del árbol rápido y el tiempo.

Es posible calcular la aceleración teórica que debería experimentar la cadena cinemática y compararla con la medida experimental a partir de las inercias del motor de 17 kg m^2 y las de la cadena cinemática vista desde el lado del resorte, aproximadamente de 18 kg m^2 , además del par medio del resorte de 4.500 Nm . Se observa que ambos valores coinciden, por lo que tal y como se ha demostrado a través de otras vías, el par en el resorte coincide con el pronosticado por el modelo.

$$\varepsilon = \frac{\Delta M}{I_M + I_C} = \frac{(4500 - 700) \text{ Nm}}{(17 + 18) \text{ kg m}^2} = 108,6 \text{ rad/s}^2 \cong 1000 \text{ rpm/s}$$

Se comprueba por otra vía la bondad del modelo matemático del comportamiento de los resorte espirales a torsión. Las únicas desviaciones encontradas son producidas por los defectos inherentes al proceso de fabricación utilizado.

Repetibilidad de resultados.

Los diferentes ensayos mostrados anteriormente son ejemplos puntuales de la totalidad de los más de cincuenta procesos de cargas y descargas realizadas como medio de comprobar la repetibilidad de los mismos. Así por ejemplo, en la Figura 103 se muestran cuatro ensayos para la curva característica del resorte en que la dispersión es menor que el 5,5%.

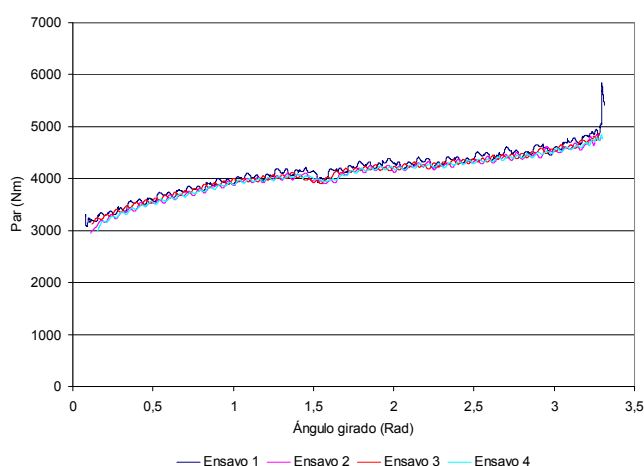


Figura 103. Repetibilidad en los ensayos par ángulo girado.

Consideraciones relativas a diámetros equivalentes por efecto del espesor.

Como ha sido planteado en el análisis de la influencia del espesor del resorte sobre la curva característica, es posible plantear unos radios de árbol y carcasa modificados respecto a los geométricos para tener en cuenta el efecto del espesor. En este caso concreto se considera que los radios equivalentes serán 0,252 m, respecto al teórico de 0,270 m para el árbol y para la carcasa 0,325 m respecto a los 0,300 m.

Tabla 17. Parámetros de diseño para diferentes radios equivalentes.

		l=0 m		l=5 m		l=10 m	
		desde	hasta	desde	hasta	desde	hasta
Valor teórico	Radio (m)	0,30	0,27	0,30	0,27	0,30	0,27
	Curvatura (m^{-1})	3,33	3,70	3,33	3,70	3,33	3,70
	Incremento de curvatura (m^{-1})	0,37		0,37		0,37	
Valor modificado	Radio (m)	0,33	0,30	0,30	0,27	0,28	0,25
	Curvatura (m^{-1})	3,08	3,39	3,33	3,70	3,52	3,97
	Incremento de curvatura (m^{-1})	0,31		0,37		0,45	

Tabla 18. Pares de bloqueo y desbloqueo para diferentes pares de bloqueo.

Length (m)	0	5	10
EI (Nm^2)	1.583	1.789	2.056
$C_0(m^{-1})$	0,170	1,025	1,88
Par bloqueo en carcasa (Nm)	4.607	4.213	3.372
Par bloqueo en árbol (Nm)	5.097	4.785	4.297

En la *Tabla 17* se observa la variación en diferentes parámetros de diseño así como los pares de bloqueo en árbol y carcasa en función de la selección de los radios equivalentes que tienen en cuenta el espesor del fleje (

Tabla 18). El modelo con los radios modificados que tienen en cuenta el espesor, genera una buena correlación con el resultado de los ensayos en la zona de baja variabilidad del par, donde el modelo analítico es válido (*Figura 104*). También se comprueba la coherencia entre el modelo analítico y el general.

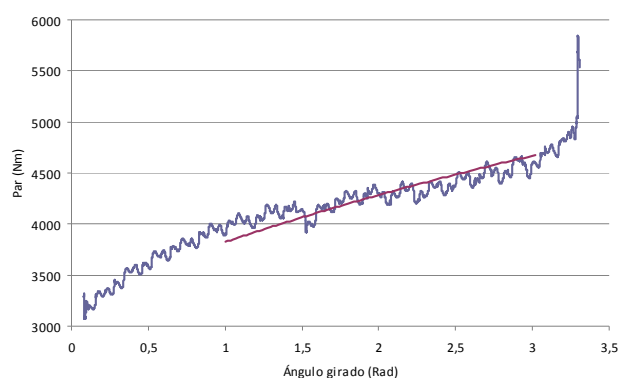


Figura 104. Curva característica con resorte con modelo de radios equivalentes al efecto del espesor.

7.3.- Resorte espiral a torsión de alta variabilidad de par.

El resorte de par variable desarrollado para el análisis de su comportamiento y validación teórica tienen las siguientes características (*Tabla 19*) (ver Capítulo 2).

Tabla 19. Características del prototipo de resorte de alta variabilidad del par.

Material	Módulo de Young	Tensión máxima admisible	Densidad	Energía almacenada
Fibra vidrio HP unidireccional	$3,30 \cdot 10^{10}$ Pa	$7 \cdot 10^8$ Pa	1.820 kg/m^3	0,35 Wh
Radio del árbol	Radio de carcasa	Longitud del fleje	Espesor	Altura
0,030 m	0,080 m	0,825 m	5,34 mm	$4 \cdot 10^{-2}$ m
Par nominal	Variabilidad par	Curva generatriz	Rigidez resorte	
450 Nm	Par variable	Espiral de Arquimedes	47,74 Nm/rad 225 Nm en 270 grados	

Para fabricar el resorte se dispone de un molde de cuatro placas, tres de aluminio y una de acero que tienen mecanizado mediante control numérico el recorrido que deben llevar las fibras para conformar la geometría del resorte, cuya finalidad es obligar a las fibras y a que el árbol esté apoyado en un mismo plano (*Figura 105*). Una vez fabricado en húmedo el resorte (mediante fibra de vidrio unidireccional y resina

derakane), se debe realizar tanto el proceso de curado como el de postcurado. El curado somete a la pieza a una rampa de temperatura de 30 hasta llegar a una temperatura de 60 °C, se mantiene a dicha temperatura durante una hora y después mediante otra rampa de 30 se alcanzan los 90 °C durante un tiempo de 7 horas, tras el ciclo se deja que alcance temperatura ambiente. En el postcurado se somete a la pieza a una rampa de temperatura de 30 hasta llegar a una temperatura de 70 °C, se mantiene a dicha temperatura durante 5 horas para luego dejar enfriar hasta temperatura ambiente (*Figura 106*).



Figura 105. Proceso de montaje del molde del resorte de par constante.

La carcasa ha sido fabricada en fibra de vidrio MAT 500/800 y resina derakane momentum 411-350 formada por cuatro capas en configuración 0/90 en las capas exteriores, y configuración $\pm 45^\circ$ en las capas intermedias, con objeto de reducir el peso total del sistema y aumentar su resistencia mecánica. Las bridas de unión y fijación de la carcasa están formadas por dos capas exteriores de fibra de vidrio con forma de anillo circular y entre ellas se disponen refuerzos longitudinales de fibra que permiten realizar la transición entre el cuerpo principal y las bridas. Se incluyen refuerzos de fibra de vidrio en hilos roving enrollados en el punto de unión con el fin de reforzar las bridas.

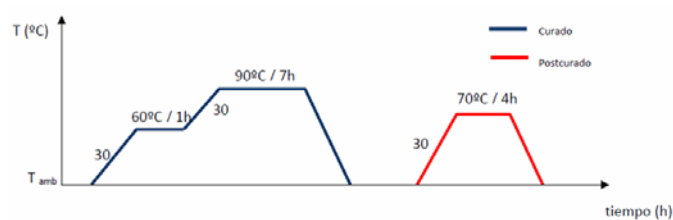


Figura 106. Perfil de temperaturas para el curado del resorte.

El anclaje del resorte a la carcasa se realizará mediante unión tanto adhesiva, resina sileone, y atornillada, como elemento de seguridad adicional (*Figura 107*).



Figura 107. Imagen del resorte fabricado en la carcasa.

7.3.1.- Ensayos del resorte.

Una vez finalizada la fabricación del resorte, se realizan los ensayos para verificar la correlación de la curva de comportamiento. A diferencia del resorte anteriormente ensayado, que requería una instalación de ensayo con cadena cinemática externa, este resorte es ensayado con aplicación manual del par. Por tanto ciertos ensayos previos no son necesarios. El único ensayo de recepción es la fabricación del mismo según especificaciones. Como se puede observar en la *Figura 107* el resorte ha sido fabricado con dos entradas en paralelo, como medio de análisis y comprobación de las hipótesis de optimización mediante configuraciones serie - paralelo.

Los ensayos realizados a partir de este prototipo, van a ir destinados a analizar los siguientes aspectos del comportamiento del resorte y de su estudio analítico:

- Curva característica para ángulo girado y comprobación de los dos métodos analíticos de caracterización del resorte.
- Análisis de la solución inversa del problema analítico linealizado.
- Análisis del método analítico para la caracterización de la variación del par y de sus derivadas.

Dentro de estos tres aspectos, es importante destacar que el primero de ellos tienen en cuenta el espesor del fleje, mientras que los dos siguientes, no han tenido en cuenta el espesor por la complejidad y la imposibilidad de obtener ecuaciones y conclusiones de forma directa.



Figura 108. Montaje final del resorte para ensayo de par.

Para el desarrollo de los ensayos se parte de un resorte con dos entradas en paralelo fabricándose un cilindro con una brida como superficie fija que permita realizar los ensayos. Se adopta la solución de un tubo central con agujero para barra calibrada como medio de introducir par. Las uniones entre árbol y fleje se realiza mediante moleteado en la superficie metálica y enrollamiento de una longitud extra sobre el árbol.

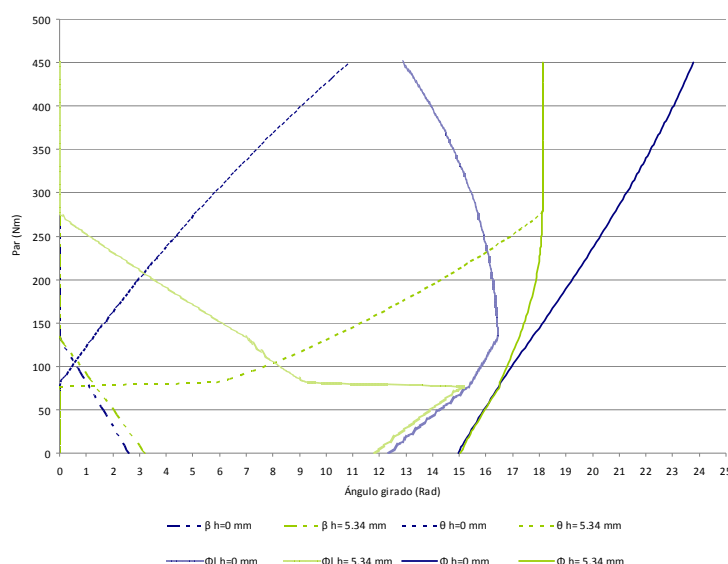


Figura 109. Comparación de curva par ángulo girado según el espesor del fleje.

Se ha realizado el ensayo de carga cinco veces consecutivas, como medio de comprobación de la repetibilidad de los resultados. En todos ellos se observa el seguimiento de la curva característica par – ángulo girado con un error máxima del 6%. Adicionalmente al efecto del espesor, la diferencia respecto a la curva teórica se debe básicamente a la falta de exactitud que introduce tanto el empleo de materiales compuestos como al proceso de fabricación que conlleva y a los errores asociados al sistema de registro de datos.

Como se observa en la *Figura 109*, la influencia en el modelo con y sin espesor de la espira del fleje no sólo es patente en la curva par - ángulo girado sino también en las curvas en las que se puede descomponer, bloqueo en carcasa, bloqueo en árbol y espiras libres. Se observa en el ángulo total girado un bloqueo anticipado en el árbol que genera una zona vertical de comportamiento. Respecto al bloqueo en la carcasa se observa un aumento del ángulo girado para cada par.

También se ven modificados tanto el ángulo girado por las espiras libres como el ángulo de bloqueo sobre el árbol. En el bloqueo en el árbol aparece una primera zona de ángulo constante. El espesor ocasiona que desde el par inicial exista bloqueo directo en el árbol, en vez de realizar un bloqueo continuo desde cero.

Así mismo la pendiente del bloqueo es menor para el modelo con espesor. Por otra parte la primera zona del ángulo girado por las espiras libres, caracterizado por el desbloqueo en la carcasa sin bloqueo en el árbol, no tiene influencia el espesor del fleje. A partir del bloqueo en el árbol el comportamiento pronosticado por el modelo sin espesor, en el que el ángulo disminuía lentamente, no se ve correlacionado cuando interviene el espesor, ya que este genera una disminución importante del ángulo girado hasta ser cero a un par inferior al del modelo sin espesor.

En el ensayo se han medido tanto del ángulo total girado como el desbloqueo en la carcasa y el bloqueado en el árbol. A través de una regla calibrada situada a lo largo de todo el perímetro de la carcasa y del árbol. El ángulo girado por las espiras libres no ha podido ser medido, lo que se ha realizado, al disponer de los otros tres ángulos, es su obtención a través de la relación que los une. En la *Figura 110* se observa la alta correlación entre los valores medidos y pronosticados por el modelo. Sin embargo los ensayos no han superado el par de 300 Nm, ya que a partir de ese par se producía el bloqueo completo del fleje en el árbol, con el consiguiente trabajo de la sección resistente del mismo a tracción, pudiéndose a alcanzar la tensión máxima del material.

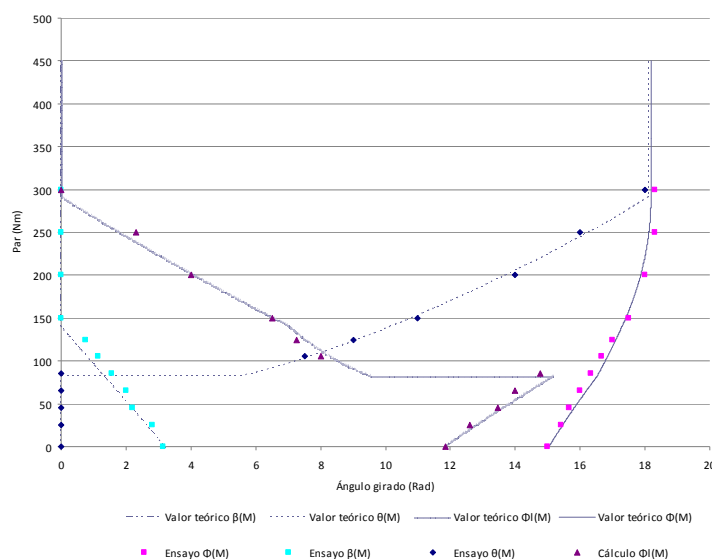


Figura 110. Comparación de curva par - ángulo girado, modelo con espesor y valores ensayados.

7.3.2.- Aplicación del método analítico de resortes espirales a torsión. Método inverso de resolución.

El resorte desarrollado va a ser empleado para analizar la solución inversa del sistema de ecuaciones del problema analítico linealizado planteada como método analítico de diseño de resortes espirales a torsión en la conceptualización del procedimiento de diseño. En este caso se conocen tanto las especificaciones del

diseño como la solución a obtener, lo que se ha realizado es el análisis del sistema de ecuaciones mediante igualación de potencias de par y de longitud analizando los errores cometidos.

Se toma como zona de estudio el primer rango de comportamiento del resorte, caracterizado por el desbloqueo de espiras en la carcasa sin bloqueo en el árbol. En este análisis se emplea el modelo de resorte sin espesor. La linealización de las ecuaciones se produce como máximo en grado cuadrático. Se dispone del siguiente sistema de ecuaciones:

- Ecuaciones de definición del ángulo desbloqueada en la carcasa. Dicho sistema de ecuaciones es de orden cuarto, con igualación a cero de los coeficientes mayores que el cuadrático y error cometido en el lineal del 9% y en el término independiente del 3%.
- Ecuaciones de definición del ángulo bloqueada en el árbol. Al no tenerse en cuenta el espesor, el modelo no dispone de bloqueo en el árbol, por lo que dicho valor se mantiene siempre a cero, cumpliéndose la igualdad.
- Ecuaciones de definición del ángulo total girado. Sistema de ecuaciones de grado seis en el par, con igualación a cero de coeficientes para grado mayor o igual a tres, y error del 9% en coeficiente cuadrático, 8% en coeficiente lineal y 1% en independiente.

Los coeficientes obtenidos a partir del sistema de ecuaciones generado, permiten representar gráficamente y comparar, las incógnitas del sistema de ecuaciones del procedimiento de diseño: curvatura, ángulo girado por las espiras bloqueadas en la carcasa, ángulo girado por las espiras libres y el ángulo total girado por el resorte. En la *Figura 111* se observa la curvatura comparada entre la directa del resorte fabricado y la obtenida mediante método inverso en el sistema de ecuaciones, siendo su comportamiento en ambos casos parabólico creciente. El error máximo es del 14% en la unión en la carcasa, dicho error va disminuyendo con el aumento de la longitud, teniendo un máximo relativo en la longitud final de 7%.

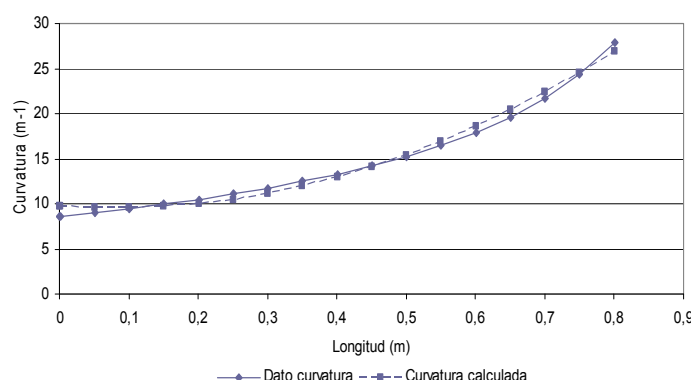


Figura 111. Curvatura obtenida por el método analítico de resolución.

En la *Figura 112* se observa el valor del ángulo total girado por el resorte, cuyo error es creciente con el par hasta un valor máximo del 6%. En este caso el par máximo es aquel en el termina la primera zona de cambio de tipología de curva, al finalizar de desbloquear la longitud de la carcasa, aproximadamente a 130 Nm. El comportamiento del ángulo girado es prácticamente lineal desde el par inicial hasta dicho valor.

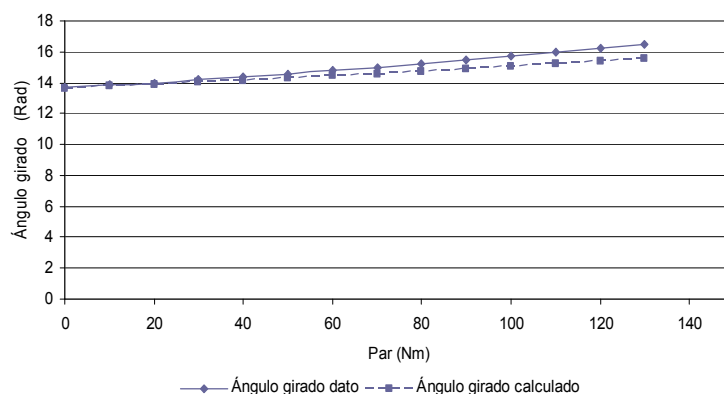


Figura 112. Ángulo total girado obtenido por el método analítico de resolución.

En la *Figura 113* se observa el valor del ángulo girado por las espiras bloqueadas en la carcasa, cuyo error es creciente con el par desde un valor cero hasta un valor máximo del 20% en el par máximo. Su comportamiento es cuadrático decreciente con el par.

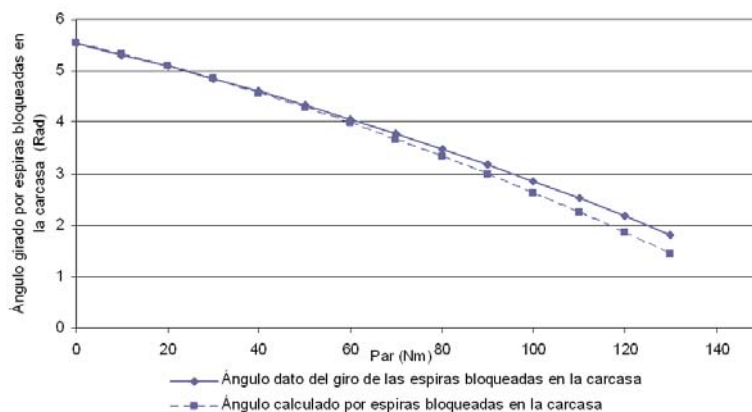


Figura 113. Ángulo girado por las espiras bloqueadas en la carcasa obtenido por el método analítico de resolución.

En la *Figura 114* se observa el valor del ángulo girado por las espiras libres, cuyo comportamiento es lineal creciente con error máximo del 4% en el par máximo.

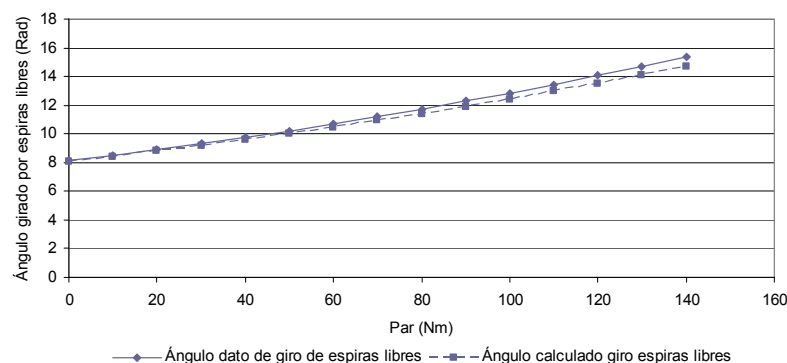


Figura 114. Ángulo girado por las espiras libres obtenido por el método analítico de resolución.

7.3.3.- Validación del modelo analítico para la obtención de la variación del par y de su pendiente.

La validación de las expresiones desarrolladas para la obtención de las variaciones de los ángulos girados con el par (tanto en primera como en segunda derivada) ha sido analizada con el resorte de comportamiento lineal con el par. El modelo de análisis de la curva característica y su variación con el par no tiene en cuenta el espesor. El modelo analítico de cálculo de derivadas se va a tomar la primera zona de comportamiento homogéneo del resorte, desbloqueo en carcasa sin bloqueo en el árbol.

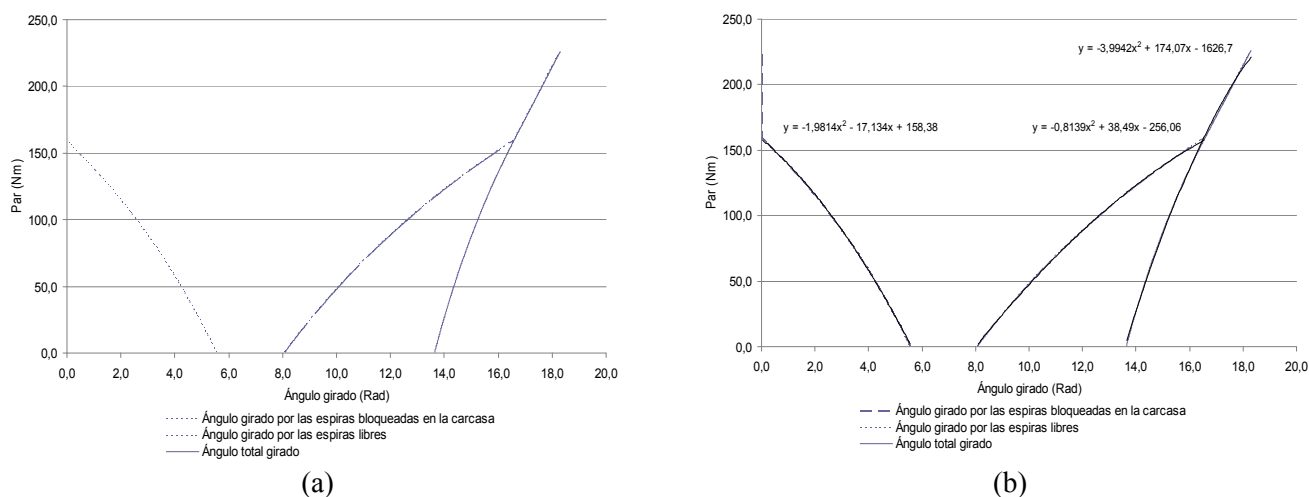


Figura 115. Variación de los ángulos girados (libre y bloqueados en árbol y carcasa) en función del par.

Se ha linealizado primeramente tanto la curva característica, como la variación de los ángulos girados por las espiras libres y las bloqueadas tanto en el árbol como en la carcasa en función del par aplicado

(Figura 115 (a)). Obteniéndose expresiones analíticas, tanto para el ángulo girado por espiras libres, como las bloqueadas en la carcasa y el total, ya que el bloqueo en el árbol es nulo (Figura 115 (b)).

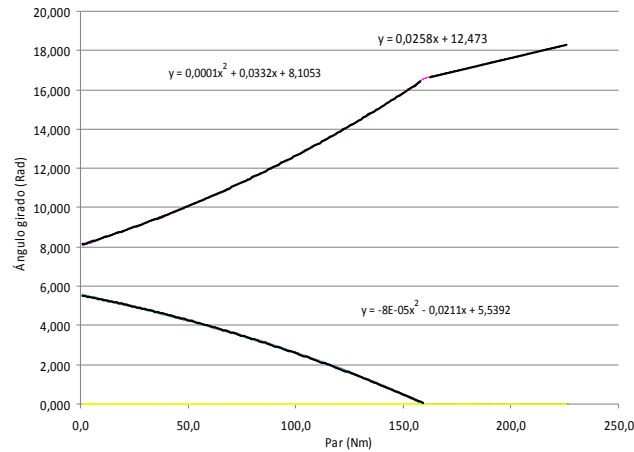


Figura 116. Ecuaciones en desarrollo polinómico por tramos de los ángulos girados en función del par.

Se observa que las curvas características tienen dos zonas de diferente comportamiento, la primera de ellas se corresponde al desbloqueo de espiras de la carcasa y la segunda no dispone de espiras bloqueadas en la carcasa. Esto implica la necesidad de disponer de una ecuación para cada uno de dichos tramos. Obsérvese que en la Figura 115(b) se ha linealizado la ecuación únicamente en la primera zona, hasta que desaparece el desbloqueo de espiras. En la Figura 116 se observan las ecuaciones características por tramos del ángulo girado en función del par y no de forma directa como en figuras anteriores en las que el par dependía de los ángulos girado.

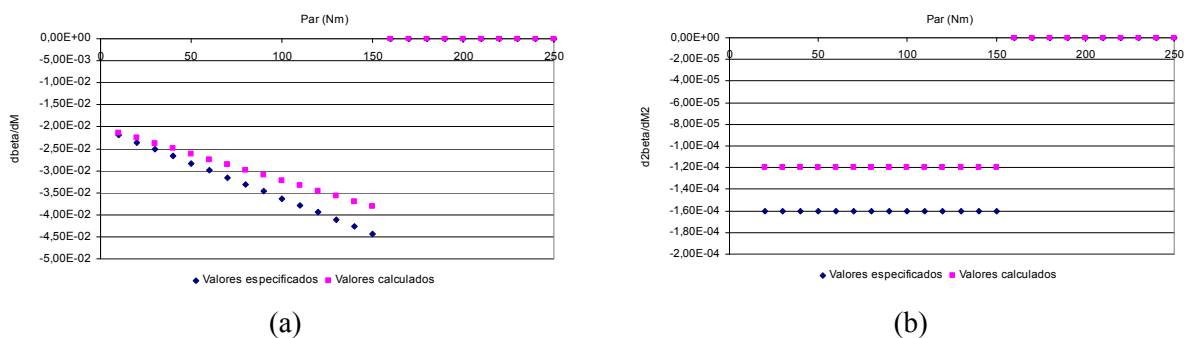


Figura 117. Variación de $d\beta/dM$ y $d^2\beta/dM^2$ con el par.

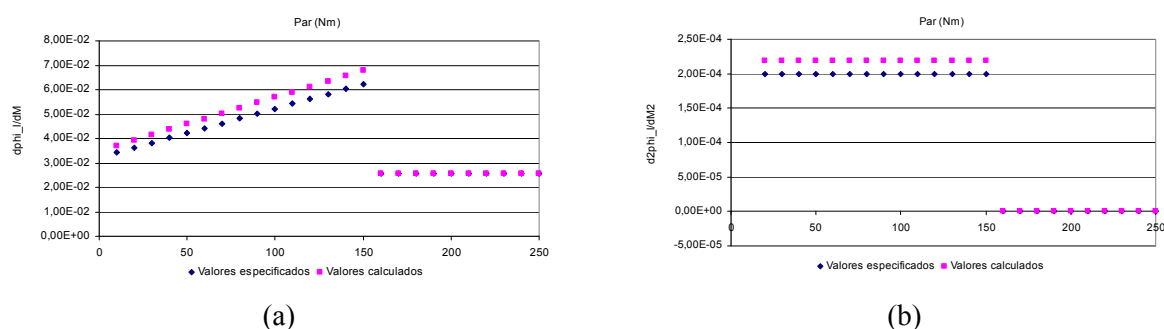


Figura 118. Variación de $d\Phi/dM$ y $d^2\Phi/dM^2$ con el par.

A partir de estas ecuaciones, es posible comparar los valores de las variaciones de los ángulos girados con el par tanto para el ángulo girado por las espiras bloqueadas en la carcasa como por el girado por las espiras libres (Figura 117 (a) y (b), Figura 118 (a) y (b)). Se observa la alta correlación entre valores ensayados y especificados, aunque los errores cometidos son elevados, en casos puntuales pueden llegar hasta el 40%. Estos errores se deben por una parte a las altas incertidumbres cometidas en el cálculo de las derivadas tanto de la propias variables a calcular (ángulo girado por las espiras libres y por las bloqueadas en la carcasa) como en la curvatura. La toma de más datos en el ensayo generaría la disminución de los citados errores, aunque la forma de las curvas calculadas es coherente con el modelo.

7.3.4.- Cálculo de la deformación carcasa – fleje mediante el método energético.

Para realizar el cálculo de la fuerza de contacto carcasa – fleje y de la deformada de la carcasa se supone, como se ha indicado en el análisis energético, que la deformación de la carcasa va a ser un aumento del radio. Para calcular el nuevo radio se iguala la energía de la deformación de la carcasa con la energía de la fuerza entre los estados de montaje y de liberación del resorte tras el montaje, todas ellas para diferentes incrementos de radio a partir del nominal.

Así se obtiene la Figura 119 (b), sólo se ha representado los aumentos de radio de la carcasa, existiendo así mismo un conjunto de soluciones para decrementos de par, que no son consideradas válidas ya que la carcasa al deformarse va a aumentar de diámetro y nunca va a disminuir con el modelo de deformación planteado. La curva de la energía por bloqueo del resorte sobre la carcasa (Figura 119 (a)) tiene una forma análoga a las de las diferentes energías puestas en juego por el resorte como se observa por ejemplo en la Figura 50. El nuevo radio de la carcasa teórico será de 0,825 m, lo que implica un aumento de radio de 2,5 cm. La deformación real alcanzada y medida tras el montaje es de 2,2 cm, con lo que el error cometido entre

el modelo y los valores ensayados es de 12%. Esta deformación permite calcular la fuerza teórica carcasa - resorte, sin embargo no ha sido medida experimentalmente.

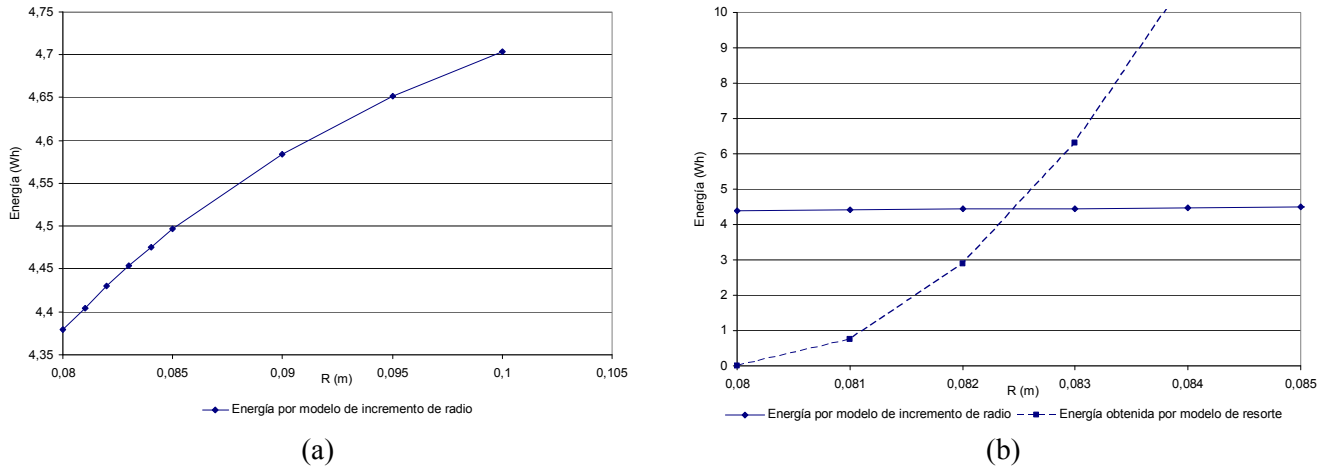


Figura 119. Gráficas energía y punto equilibrio de formación para resorte de alta variabilidad del par.

7.4.- Conclusiones de los ensayos.

Los resultados mostrados en los ensayos llevados a cabo, las consecuencias de los mismos y la importancia de ciertas variables de influencia son desglosadas en los siguientes puntos para los dos prototipos desarrollados.

Resorte de baja variabilidad del par.

Los ensayos planteados y analizados sobre el prototipo de resorte de baja variabilidad de par permiten plantear las siguientes conclusiones tanto sobre el modelo empleado como sobre su comportamiento y los resultados de los mismos,

- Tanto el modelo general de resortes espirales a torsión como el modelo particular para resortes con curva generatriz clotoïdal con variación de la rigidez a flexión con la longitud, desarrollados, permiten el análisis y la modulación de la curva característica par - ángulo girado según especificación. El punto de error máximo en la curva característica es de un 12%, siendo el error medio ponderado a lo largo de toda la curva un valor muy inferior a este, con error de repetibilidad tras cinco ensayos del 6%. El análisis energético realizado conjuntamente con la curva par – ángulo girado proporciona un error en el flujo energético de carga - descarga y transmisión en la cadena cinemática del 3,9%.

- Es necesario introducir el efecto del espesor si la relación entre diámetros de carcasa y árbol es cercana a la unidad. De no introducirlo, el modelo teórico no reproduce bien el comportamiento del resorte. Sin embargo el modelo con radios de carcasa y árbol equivalentes da una buena correlación con los datos experimentales. El modelo que tiene en cuenta el espesor reproduce el comportamiento del resorte, y es por tanto válido para el diseño de cualquier resorte espiral.
- El desarrollo es válido para almacenamiento de energía, si bien es necesario desarrollar potencias superiores para poder computar correctamente la potencia regenerada en la fuente. Además, se hace necesario un diodo entre la fuente y el variador para evitar medidas erróneas de par.
- El procedimiento de fabricación seguido da un módulo de elasticidad más bajo del esperado, y no controla bien el espesor.

Resorte de alta variabilidad de par.

Los ensayos planteados y analizados anteriormente sobre el prototipo de resorte de alta variabilidad de par permiten plantear las siguientes conclusiones tanto sobre el modelo empleado como sobre su comportamiento y los resultados obtenidos en los mismos,

- La curva característica y el análisis de tensiones se corresponden razonablemente con el modelo desarrollado, con errores máximos del 5% .
- El modelo con espesor empleado, cuando este tiene influencia sobre el comportamiento del fleje, permite hacer compatible los resultados experimentales con los teóricos. Sin embargo los modelos teóricos con espesor se complican de tal forma que la resolución analítica y sólo se pueden abordar, en principio, mediante métodos de integración numérica.
- El modelo energético desarrollado permite analizar la curva característica por ángulo girado de resorte. Sin embargo el desarrollo y cálculo numérico del modelo energético y su comparación con las curvas características ensayadas es necesario.
- El modelo analítico de obtención de la variación de los ángulos girados con el par, tanto en primera como en segunda derivada es coherente con los valores ensayados cuando el espesor no es una variable de influencia directa, aunque el proceso desarrollado requiere el análisis por cada uno de los tramos que constituye la curva característica. Así mismo se debe considerar el análisis independiente de cada tramo de los ángulos girado por las espiras libres, bloqueadas en la carcasa o en el árbol, que se van a corresponder con comienzos o finalizaciones de cambio de características en el fleje, tales como bloqueos, cambios del módulo resistente a flexión del fleje o cambios bruscos de curvatura,

entre otras. El error cometido en el modelo analítico inverso se encuentra entre un 3% y un 9%. Así mismo los errores en la obtención de las pendientes en la curva para α – ángulo girado son máximos de un 40%, lo que es achacable a la necesidad de aumento de los puntos de cálculo, ya que se tiene errores cercanos a cero y la forma de las curvas características son análogas entre modelo y ensayo.

Capítulo 8.- CONCLUSIONES Y LINEAS FUTURAS DE DESARROLLO.

En este capítulo se analizan y sintetizan las aportaciones más relevantes que se han alcanzado mediante el desarrollo de la presente Tesis Doctoral. Se analizan los objetivos alcanzados respecto a los planteados al comienzo. Una vez estudiados los desarrollos, análisis genérico de los resortes espirales a torsión y su particularización para curva generatriz clotoideal con rigidez a flexión variable, se procederá a analizar las aportaciones más relevantes que los mismos han permitido llevar a cabo, respecto a los existentes en el ámbito científico. Finalmente se plantean posibles líneas de mejora y desarrollo futuro, tales como estudio de materiales y secciones resistentes o la optimización de los periféricos del acumulador.

8.1.- Cumplimiento de los objetivos.

Se analiza el cumplimiento de los objetivos marcados al comienzo de esta Tesis Doctoral. El primero de ellos es el análisis pormenorizado y modelización de los resortes espirales a torsión, tanto en su comportamiento general como en el caso particular que posibilita su estudio analítico. El estudio de los resortes espirales a torsión se inició con el análisis de cada una de las variables de diseño y su relación con sus características funcionales, básicamente con la curva par - ángulo girado. Se ha estudiado el efecto de la curva generatriz del fleje, la variación de la rigidez a flexión a lo largo de la longitud, geometría, material de fabricación, bloqueo de espiras, longitud bloqueada tanto en árbol como en carcasa, longitud libre, radios de carcasa y de árbol... así como los efectos correlacionados de los mismos. El estudio ha permitido plantear un procedimiento de diseño de este tipo de resortes, en función de la curva característica a obtener y las limitaciones y restricciones de diseño. Con el procedimiento se plantea la optimización de la sección resistente y configuraciones serie – paralelo de resortes.

Se ha realizado la modelización matemática de los factores de influencia, lo que permite medir y cuantificar la influencia de cada uno de ellos sobre las características a análisis. Esto permite sistematizar el procedimiento y analizar la influencia concreta de cada una de las medidas adoptadas así como la influencia de las restricciones planteadas. Se ha planteado un procedimiento analítico de resolución, mediante la expresión polinómica de los ángulos girados y de los parámetros de influencia, tanto módulo resistentes a flexión como curvatura, que permite disponer de un sistema de ecuaciones genéricas del problema. Sin embargo, únicamente en ciertos casos el sistema tiene resolución directa, en la mayoría se requiere una solución numérica.

Este análisis matemático, no permite realizar un estudio analítico para la totalidad de los casos. Existe un caso concreto que ha permitido realizar un estudio analítico completo, son los resortes con curva generatriz clotoïdal y variación de la rigidez a flexión de manera inversamente proporcional a la longitud. La aplicación de estos resortes se centra en las curvas características con baja variabilidad de par. Analíticamente se ha analizado tanto la curva característica como los diferentes comportamientos de estos resortes, observándose la coherencia y coincidencia entre este caso particular y la metodología general.

Los planteamientos realizados y los procedimientos desarrollados, deben ser validados. Para ello, se plantean dos casos extremos: curva característica con alta y de baja variabilidad. Se diseñan y fabrican un resorte con cada una de las características anteriores, así como la instalación de ensayos y el correspondiente plan de ensayos, con el fin de analizar el número mínimo de prototipos y los objetivos de los ensayos en cada uno de ellos. Los ensayos realizados sobre ambos prototipos han sido:

- Prototipo de baja variabilidad del par. Ensayo de curva característica, montaje del resorte, comportamiento carga - descarga y análisis resistivo.
- Prototipo de alta variabilidad del par. Ensayo de curva característica, aplicación del método analítico de resortes espirales a torsión, aplicación del método inverso de resolución y validación del modelo analíticas para la obtención de la variación del par y de su pendiente con el par.

Los resultados han sido alcanzados a partir de ciertas hipótesis, como es la baja variabilidad del par o los efectos despreciables de la cortadura y de la tracción - compresión, validadas tanto numéricamente como experimentalmente. Con ello los resultados son válidos en el espectro de hipótesis definidas como datos de partida del modelo. Una vez validado el modelo se estudia su optimización con diferentes secciones y materiales y configuraciones serie o paralelo.

Todas las actividades anteriores permiten definir el cumplimiento de los hitos definidos en la Tesis Doctoral, marcados tanto en el objetivo principal de la misma (modelo generalizado de resortes espirales a torsión y procedimentación del mismo así como el caso particular de resortes con curva generatriz clotoïdal y su módulo resistente variable con la longitud), como en los secundarios (aplicación de las metodologías de desarrollo de producto, validación la metodología y tecnología de acumulación propuesta).

8.2.- Análisis de aportaciones. Importancia industrial.

Las aportaciones de este trabajo se centran en el estudio y planteamiento de un procedimiento de desarrollo de un elemento de máquina como son los resortes espirales a torsión, así como el estudio analítico y la cuantificación matemática de los diferentes factores de influencia, no planteados en la literatura

científica y tecnológica analizada. Otro de los aspectos no analizados de una manera metódica en la literatura especializada, consiste en abordar el estudio de los resortes con baja variabilidad del par de manera sistemática y analítica, y poder definir su variabilidad a priori como una variable más de diseño de este tipo de resortes.

La otra gran aportación es el planteamiento de un método de acumulación de energía puramente mecánico de aplicación industrial que elimina los posibles inconvenientes de sistemas eléctricos o electrónicos. Las configuraciones serie - paralelo de este tipo de resortes permitiría tener un rango de mercado análogo a los sistemas de media y baja densidad de energía. La importancia industrial del producto desarrollado radica en las dos vertientes mencionadas anteriormente.

8.3.- Líneas futuras de investigación y desarrollo.

Los desarrollos llevados a cabo han permitido localizar ciertas líneas de desarrollo o investigación futura marcada dentro de los objetivos secundarios de este trabajo. Dichos trabajos se van a englobar en dos grandes líneas, por una parte en lo que es el resorte espiral a torsión y por otra los equipos periféricos que permiten aplicar el resorte espiral como acumulador de energía.

Respecto al resorte espiral a torsión, se requiere abordar la investigación de métodos continuos y semiautomáticos de fabricación en los que intervenga menos la mano de obra directa, ya que ciertas faltas de homogeneidad se deben a dicho efecto. Así mismo se requiere el estudio de las uniones de los materiales compuestos entre sí y entre estos y los metales, en esta aplicación en concreto en las uniones al árbol y carcasa, ya que ambas han producido reducción del radio útil del resorte y por tanto de su rango de funcionamiento. Otra de las optimizaciones, ya planteada someramente en el desarrollo, es la sección resistente del fleje del propio resorte, esto es de la forma geométrica de la sección resistente así como de los materiales empleados y sus combinaciones.

En lo referente al modelo analítico y teórico de desarrollo se debe afinar el posible desarrollo analítico o resolución numérica del efecto del espesor sobre curva característica desde un punto de vista dinámico y energético. Respecto al problema inverso se deben desarrollar métodos numéricos de resolución, mediante los cuales se minimice el error cometido entre los valores especificados y los alcanzados.

Por otra parte el planteamiento energético de los resortes debe ser validado experimentalmente, lo que implica tanto la obtención de la curva par – ángulo girado. Dichos análisis se han realizado sin tener en cuenta el espesor del fleje, por lo que otra línea de estudio será el análisis y planteamiento del modelo energético con influencia del espesor.

Como segundo conjunto de trabajos de mejora se encuentra la optimización del resorte como elemento de acumulación. En este caso se deben mejorar la densidad de energía del mismo, que va a implicar la reducción de pesos tanto de este como de los sistemas auxiliares. Los sistemas en los que existe la posibilidad de disminuir su peso son el sistema de potencia y de fijación. Respecto a la potencia se debe buscar reductores y motores más ligeros, abriéndose vías de desarrollo en el acoplamiento directo del motor, fabricación de motores y reductoras en materiales compuestos y plásticos o en el acoplamiento conjunto del motor y la reductora. Por otra parte respecto a la fijación, se podrán desarrollar árbol y carcasa en material compuesto o plásticos de baja densidad y en sistemas de anclaje no metálicos.

Estas posibles líneas de desarrollo futuro y optimizaciones al sistema planteado generarán una mayor competitividad del resorte como acumulador y un aumento del conocimiento del funcionamiento y de los factores internos de influencia del resorte.

8.4.- Aportaciones científicas del autor durante el periodo de investigación.

En este apartado se enumeran los principales datos de las aportaciones científica más relevante durante el periodo de investigación. Todas ellas están relacionadas directamente con la Tesis Doctoral, habiéndose protegido ciertos desarrollos mediante patentes, tanto a nivel nacional como internacional, por lo que existe un espacio de tiempo entre estas y las publicaciones científicas, debido a la espera de su aceptación para proteger los desarrollos.

8.4.1.- Artículos.

Artículos indexados.

- Muñoz-Guijosa, J.M., Rodríguez de la Cruz, V., Fernández Caballero, D., Echávarri Otero, J. y Díaz Lantada, A. “Simple Hill-type testing system for pure bending tests with large deflections”, Experimental Mechanics ISSN: 0014-4851.
- Muñoz Guijosa, J. M.; Fernández Caballero, D.; Muñoz, J. L.; Díaz Lantada, A.; y Echávarri Otero, J.; “On the use of variable bending stiffness clothoidal strips for the analysis and synthesis of the torque - angle turned curve in spiral torsion springs”, International Journal of Mechanical Sciences ISSN: 0020-7403. Enviado – pendiente de aprobación.

- Muñoz Guijosa, J. M.; Fernández Caballero, D.; Rodríguez de la Cruz, V. Muñoz, J. L. y Echávarri Otero, J.; “Generalized spiral torsion spring model”, Mechanism and Machine Theory ISSN: 0094-114X. Enviado – pendiente de aprobación.
- Rodríguez de la Cruz, V., Fernández Caballero, D., Mujika, F. y Muñoz-Guijosa, J.M.. “Analysis of out-of-plane stresses in sandwich beams subjected to pure bending with large deflections”, Journal of Composite Materials ISSN: 0021-9983. Enviado – pendiente de aprobación.

8.4.2.- Patentes.

- “Elastodynamic energy accumulator-regulator”, WO/2008/064714.
- “Sistema de almacenamiento de energía de utilidad en máquinas y regulación de sistemas mecánicos y electrónicos” P2009-30834.
- “Dispositivo elástico de acumulación de energía mecánica” P2008-03126.

8.4.3.- Proyectos de investigación

- “Almacenamiento elástico de energía con resortes radioidales en materiales compuestos”. Proyecto de investigación C.E.N.I.T. financiado por el C.D.T.I. ref: CEN-2008-1007 Participantes: consorcio EcoTrans y Universidad Politécnica de Madrid.
- “Captador, acumulador y transmisor de energía” Proyecto de investigación PIE financiado por el I.M.A.D.E. ref: P.I.E. 679/2008 participantes: I.M.A.D.E; Universidad Politécnica de Madrid y ACUMENER I+D S.L.
- “Desarrollo de un sistema de acumulación para ayuda al arranque de vehículos automóviles.” Proyecto de investigación P.I.E. financiado por el I.M.A.D.E. ref: PIE 311/2008 participantes: I.M.A.D.E; Universidad Politécnica de Madrid y ACUMENER I+D S.L.

8.4.4.- Ponencias en congresos y jornadas.

- Muñoz-Guijosa, J. M.; Rodríguez de la Cruz, V.; Fernández Caballero, D.; Echávarri, J.; Díaz, A.; y Muñoz, J. L., “Desarrollo de un sistema de ensayo de grandes deflexiones para vigas tipo sándwich que trabajan a flexión pura”, XVIII Congreso Nacional de Ingeniería Mecánica, Universidad Castilla la Mancha 2010.

- Muñoz-Guijosa, J. M.; Rodríguez de la Cruz, V.; Fernández Caballero, D.; Muñoz, J. L.; Díaz, A.; y Echávarri, J.; “Comprobación experimental de la optimización en peso de vigas tipo sándwich sometidas a flexión pura”, XVIII Congreso Nacional de Ingeniería Mecánica, Universidad Castilla la Mancha 2010.
- Fernández Caballero, D.; Muñoz-Guijosa, J. M.; Rodríguez de la Cruz, V.; Esperón Míguez, M.; Muñoz Sanz, J. L.; y Casero Fernández-Montes, J.; “Optimización de densidad de energía en vigas de material compuesto sometidas a flexión pura”, 9º Congreso Iberoamericano de Ingeniería Mecánica, Las Palmas de Gran Canaria 2009.
- Fernández Caballero, D.; Muñoz-Guijosa, J. M.; Rodríguez de la Cruz, V.; Esperón Míguez, M.; Muñoz Sanz, J. L.; y Casero Fernández-Montes, J.; “Desarrollo y validación de la teoría general de resortes radioidales a par constante para acumulación de energía”, 9º Congreso Iberoamericano de Ingeniería Mecánica, Las Palmas de Gran Canaria 2009.
- Fernández Caballero, D.; Muñoz-Guijosa, J. M.; Rodríguez de la Cruz, V.; Esperón Míguez, M.; Muñoz Sanz, J. L.; y Casero Fernández-Montes, J.; “Integración mecatrónica de un sistema de acumulación de energía”, 9º Congreso Iberoamericano de Ingeniería Mecánica, Las Palmas de Gran Canaria 2009.
- Bautista, E.; Muñoz-Guijosa, J. M.; Muñoz, J.L.; Fernández Caballero, D.; y Celso Peña, P.; “Diseño de resortes radioidales a par constante para almacenamiento de energía”, XVII Congreso Nacional de Ingeniería Mecánica, Gijón Febrero 2008.
- Bautista Paz, E.; Muñoz-Guijosa, J.M.; Fernández Caballero, D. y Muñoz Sanz, J. L.; “Almacenamiento de energía por resortes radioidales de torsión a par constante”, 8º Congreso Iberoamericano de Ingeniería Mecánica, Cusco Octubre 2007.

8.4.5.- Proyectos fin de carrera

- San Martín Sanz, Javier. ” Desarrollo de un sistema de almacenamiento mecánico de energía aplicado como sistema de arranque Start&Stop”. Proyecto 09403357.
- Rodríguez de la Cruz, Victor. “Optimización de la densidad de energía en un resorte espiral para almacenamiento de energía fabricado con sándwiches de materiales compuestos y de la instalación de ensayos del mismo”. Proyecto 08404330.

- Esperón Míguez, Manuel. “Diseño, desarrollo de prototipo de sistema de almacenamiento de energía mecánico de energía mediante resortes radioidales a par constante e integración básica del sistema en un vehículo viario de viajeros”. Proyecto 0802124.
- Mesa Millán, Alberto. “Diseño conceptual de prototipo para validación del modelo teórico de acumulación de energía mediante resorte radioidal de par constante y diseño del plan de ensayos del prototipo”. Proyecto 0800301.
- Escobar Portillo, Luis Javier. “Sistema de almacenamiento elástico de energía: aplicación a tranvías sin catenaria”. Proyecto 07403103.
- Peña Alonso, Celso. “Estudio técnico de viabilidad de almacenamiento mecánico de energía eólica para producción de hidrógeno”. Proyecto 05402603.

REFERENCIAS.

- Al Qureshi, H.A., (2001), “Automobile leaf spring from composite materials”, J. Mater Proc Technol, 118 p 58-61.
- American Steel & Wire Co., (1941), “Manual of spring engineering”, Universidad de Michigan.
- Armand G. L., (1967), “Les ressorts : théorie et pratique avec développements sur la fabrication”. Ed. Blume. Barcelona.
- Ashby, Michael. (1999), “Materials selection in mechanical design”, Butterworth-Heinemann.
- Ashwell, D.G., (1950), “Anticlastic curvature of rectangular beams and plates”, J.R. Aeronaut. Soc., nº 479.
- Associated Spring Corporation, (1958), “Handbook of mechanical spring design”, Bristol, Connecticut.
- Auge&Cie ets, (1957), “Ressort moteur”, patente FR-1,176,728.
- Bandari, V.B., (2008), “Design of Machine Elements”, Ed McGraw-Hill, pp 429. ISBN 0-07-061131-6.
- Barnes Group Inc, (1993), “Design Handbook. Engineering guide to spring design”. Associated of Spring Barnes Group Inc., Form Nº 515.
- Barten, H.J. (1945), “On the deflection of a cantilever beam” Q. Appl. Math., II pp 168-171, III 275-276.
- Berry, W.R., (1961), “Spring Design: A Practical Treatment”, Londres Emmot & Co.
- Betemps, M., Redarce, H.-T., y Jutard, A., (1991) “Development of a multi-spiral gripper for leather industry”. Laboratoire d’Automatique Industrielle. Institut National des Sciences Appliquées de Lyon. Advanced Robotics, 1991, apos,; Robots in Unstructured Environmentsapos,; 91 ICAR., pp. 1726-1729.
- Bisshopp, K.E. y D.C. Drucker, (1945), “Large Deflections of Cantilever Beams”, Quarterly of Applied Mathematics, vol. 3, pp. 272.
- Blake, A., (1966), “Design of Curved Members for Machines”, New York Industrial Press.

- Carlson, H., (1982), “Spring manufacturing handbook”, Editor M. Dekker, Universidad de Michigan, ISBN 0824716787 y 9780824716783.
- Chen, N.; Chen, X.; Wu, Y.N.; Yang, C.G. y Xu, L, (2005) “Spiral profile design and parameter analysis of flexure spring”, Institute of Refrigeration and Cryogenics Engineering, Shanghai Jiaotong University. China.
- Chen, H.; Jia, F.; Zhang, D.; Zang, Z.; Jiang, S. y Ji, X., (2009), “A numerical analysis on no linear radial stiffness of plane supporting spring and its combination”. Proceedings of 2009 IEEE International Conference on Mechatronics and Automation, Changchun, China.
- Chen, N., Chen, X. y Wu, Y. (2006), “Design and finite element analysis of spiral flexure spring”, China Mechanical Engineering ISSN: 1004-132X vol 17, nº 12 pp. 1261 – 1265.
- Chiu, C., Hwan, C., Tsai, H. y Lee, W. (2005), “An experimental investigation into the mechanical behaviours of helical composite springs”, Composite Structures 77 pp 331-340.
- Collins, J.A., (2003), “Mechanical Design of Machine Elements and Machines: A Failure Prevention Perspective”, Wiley, New York.
- Connolly, C., (2008), “Rings and springs”. Journal: Assembly Automation, volume 28. Stalactite Technologies Ltd, Wakefield, U.K..
- De Bona, F., y Zelenika, S., (1997), “A generalized elastica-type approach to the analysis of large displacement of spring-strips,” proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science, Volume 211, Number 7.
- De Carle, D., (1971), “Practical Watch Repairing”, N. A. G. Press, Londres, Robert Hale Ltd.
- Douglas, E. W., Tensator ltd, (1981), “Spring motors”, patente GB.1.417.238.
- Dohrn-van Rossum, G., (1997), “History of the Hour: Clocks and Modern Temporal Orders”. Univ. of Chicago Press.
- Dubbel, H, - b (1969), “Manual del Constructor de Máquinas”. Editorial Labor.
- Ed Person, J.U.C., (2010), “Machine Design”, ISBNB 978-81-317-1659-5.
- Fenstermacher, D. M., (2002), “Elastic energy storage device”, patente US 6880677.
- Foster, E. E., (1965), “Improvements in springs and spring motors”. Tigrett ind. Inc. Patente GB-793.162

- Fukaya, K., (1978), "On existing spiral spring curvature form conditions", Bull Jpn Soc Precis Eng.
- Fuller, C.E. y Johnston, W.A., "Applied Mechanics Volumen 2", John Wiley & Son, Inc. pag 433 – 551, Universidad de Wisconsin – Madison.
- Gakkai, N.B. y Gakkai, O.B., (2004), "Japanese journal of applied physics: Regular paper & short notes, Volumen 43", Publication Board Japanese Journal of Applied Physics, Institute of Pure and Applied Physics.
- Gerrit, H., (2010), "Spring strut for wheel of motorcycle, has damping piston provided with piston rod, and two springs formed as spiral springs, where one of spiral springs is wound linearly, and other spiral spring wound progressively", Patente DE200910022810 20090527.
- Glasser, G., (1964), "Die berechnung, dimensionierung und anpassung von, triebfedern für uhren. Uhrentechnische Forschung Ständige Beilage der Fachzeitschrift Die Uhr". Stuttgart. Institut International Des Brevets, patente XP-001219497.
- Gross, J., (1975), "Flat spiral spring shaping method", ISSN 00435996 pp. 194-197.
- Hahn, H.T., Lagace, P.A. y O'Brien, T.K., (1995), "Composite materials: fatigue and fracture: a symposium sponsored Volumen 5", ASTM Committee D-30 on High Modulus Fibers and Their Composites, ASTM Committee E-24 on Fracture, ISBN 0-8031-2012-5.
- Hearn, E. J. (1997), "Mechanics of Materials (Third Edition)", páginas 297-325.
- Helmut Junghans, M., Patente FR-871.305, (1941), "Ressort de réparation pour mouvements d'horlogerie à échappement à balancier comportant un ressort pouvant être inséré latéralement et procédé pour la réalisation d'un tel ressort Gebru der junghans ag."
- Hicks, T. G. y Eisenberg, (1987), "Machine design calculations reference guide. McGraw-Hill engineering reference guide series. Engineering Series", McGraw Hill, Universidad de Michigan.
- Hou, J.P., Cherruault, J.Y., Jeronimidis, G. y Mayer, R.M., (2005), "Design, testing and simulation of fibre composite leaf spring for heavy axle loads", J. Strain Anal, pp 497-504.
- Hou, J.P., Cherruault, J.Y., Nairne, I., Jeronimidis, G. Y Mayer, R.M., (2007), "Evolution of the eye-end of a composite leaf spring for heavy axle loads", Composite Structures 78, School of Construction Management and Engineering, The University of Reading, pp 351-358.
- Hymans, F., (1946), "Flat springs with large deflections", Trans. ASME, J. Appl. Mech., 13 (68), A-223-A-230.

- Jenuwine and Midha, (1994), "Synthesis of Single-Input and Multiple-Output Port Mechanisms with Springs for Specified Energy Absorption", Journal of Applied Mechanics, ASME, vol. 116. n° 3, pp. 937-943.
- Kiyoshi, I. y Kasuya Shigeru I., (1971) "Automatic door closer with torsional spiral spring - this fits in moving bushing and a second similar spring fits in stationary bushing", Patente DE19691947513 19690919
- Knox, T.K. y Schmiedeler, J.P., (2009), "A Unidirectional series-elastic actuator design using a spiral torsion spring", Journal of Mechanical Design, Volume 131, Issue 12.
- Kuroda, M., (2010), "Hook structure for spiral spring", Patente US20090582058 20091020.
- Luo, K., (2009), "Labor-saving torsion spring vehicle seat", Patente: CN20071199587 20071212.
- Maker, J.H., (1978), "Steel Springs" Metals Handbook, 9º edición, Metals Park, ASM vol. 1, pp. 283-313.
- Marghitu, (2005), "Kinematic Chains and Machine Components Design", págnas 723-754.
- Masayuki, H., (2002), "Constant Force Spiral Spring" patente JP2002276710.
- McGuire, J.R. y Yura, J.A., (2009), "Advances in the analysis and design of constant-torque springs", NASA – Goddard Space Flight Center, Greenbelt, MD y The University of Texas at Austin, Austin, TX.
- McGuire, J., (1994), "Analysis and design of constant-torque springs used in aerospace applications", Ph. D. Dissertation, The University of Texas at Austin.
- Miller, F.P., Vandome, A.F. y McBrewster, J., (2010), "Torsion Spring", Editor VDM Publishing House Ltd, ISBN 6132771875 y 9786132771872.
- Miracle, Daniel B. and Donaldson, Steven L. (2001), "ASM Handbook. Volumen 21. Composites". ASM International; The Materials Information Society. ISBN 0871707039.
- Morikawa, R. y Yoshikawa, J.P., (1990), "Spring drive unit of pull-back windup type", patente US5103936.
- Mizuno, H., (2004), "Automatic machine design is attained by mastering the handling of difficult to supply articles. Automatic supply of torsion springs". Machine Design Journal.
- Munzenmayer Wahl, A., (1963), "Mechanical springs", McGraw-Hill, Universidad de Michigan, pp 143-145.

- Neg'ator®, (1979), "Constant force spring", patente XP001219494.
- Ng, YF., (2003), "Mechanical behaviour of composite spring with embedded shape memory alloy", M. Phil. Thesis. The Hong Kong Polytechnic University.
- Niemann, G. (1967) "Tratado teórico práctico de elementos de máquinas". Editorial Labor.
- Nussbaumer Gustave, (1920), "Resort de barillet", patente CH-94.867.
- Ohtsuki, A., Ohshima, S. y Itoh, D., (2001), "Analysis on Characteristics of a C-Shaped Constant-Force Spring with a Guide," JSME International Series C vol. 44 nº 2, pp. 494-499.
- Orthwein, W.C., (1990), "Machine component design", Universidad de Minnesota, West Pub. Co., ISBN 0314242570 y 9780314242570.
- Park, S.J., Yoon, J.P., Cha, I.S. y Lim, J.Y. (2004), "A study on the stand-alone operating or photovoltaic/wind power hybrid generation system", 35th Annual IEEE Power Electronics Specialist Conference, Aachen, Alemania.
- Philip, N.G., (2011), "Spring assist for multi band roller shade", patente US20090534127 20090801
- Pook, L.P., (2010), "An introduction to coiled springs (mainsprings) as a power source", International Journal of Fatigue.
- Queener, C.A. y Wood, G.E., (1970), "Spiral power springs", ASME Pap.
- Reymondin, C.-A., Monnier, G., Jeanneret, D. Y Pelarati, U. (2003), "The Theory of Horology", The technical college of the vallee de joux, Editado por The Swiss federation of technical colleges.
- Reynal, R., (1966), "Estudio y Calculo de muelles"; Ed. Hispano Europea.
- Reynolds, N. y Reynolds, W. C., (2007), "Torsion spring cartridge assembly", patente US4921231.
- Rowell, H. S., (1934), "Theory and design of laminated springs," Proceedings of the Institution of Automotive Engineers, volume 28.
- Sadatomo, K., (1985), "Spiral spring chained body", patente F03G 1/00 F03G 1/02, 60119385.
- Samuel Newman, A., (1926), "Improvements in Driving Springs", patente nº 5257/26 252.108.
- Scott, E.J. y Carver, D.R. (1955), "On the nonlinear differential equation for beam deflection", Trans. ASME, J. Appl. Mech., 22(7), 145-148.
- Seames, A.E. y Conway, H.D., (1957), "A numerical procedure for calculating the large deflecting the large deflections of straight and curved beams", Trans. ASME, J. Appl. Mech, 49, 648-664.

- Shigley, Joseph E.; Mischke, Charles R.; Budynas, Richard G. (2003), "Mechanical Engineering Design", New York, McGraw Hill, p 542.
- Shimoseki, M., Kuwabara, T., Hamano, T. e Imaizumi, T., (2003), "FEM for springs", Japan Society of Spring, ISBN 3-540-00046-1 Springer Verlag Berlin Heidelberg New York.
- Shinohara, A., y Hara, M., (1978), "Large deflection of a circular C-shaped spring," International Journal of Mechanical Science.
- Shokrieh, M.M. y Rezaei, G., (2003), "Analisis and optimisation leaf spring", Report nº EBG01, The University of Reading.
- Silberstein, D., (2002), "How to make springs". Bazillion.
- Society of Automotive Engineers, (1996), "SAE manual on design and application of helical and spiral springs", Society of Automotive Engineers, ISBN 1560915951 y 9781560915959.
- Spring Manufacturers Institute, (2004), "Encyclopedia of Spring Design".
- Spring Manufacturers Institute Inc., (1991), "Handbook of spring design", Spring Manufacturers Institute Inc., Universidad Estatal de Pensilvania.
- Spring Manufacturers Institute, (2002), "Handbook of Spring Design".
- Soo, S.N. y Sun, P.Y., (2010), "Spiral spring generator which uses solar energy", Patente KR20090113594 20091123.
- Soroushian, P., Chowdhury, H. y Nossoni, A., (2000), "Design and experimental verification of pseudoelastic-based constant-force springs", Journal of intelligent material systems and structures ISSN 1045-389X, vol. 14m nº 8, pp. 475-481. Michigan State University, E. Lansing.
- Smith, W. F., (2004), "Introducción a la ciencia e ingeniería de materiales", McGraw-Hill.
- Sui, G., Fan, Y.Z. y Shong, W.H. (2001), "Manufacture and experiment study of composite cylindroid spiral spring", Acta Materiae Compositae Sinica Y. ISSN: 1000-3851, col. 18, nº 1, pp 46-49.
- Swift, W.A.C., (1972), "An analysis of the spiral spring", Ph. D. Thesis, University of Sheffield.
- Swift, W.A.C. (1974), "Influence of spring-back on the characteristics of the spiral spring", Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, London, pp 615-625.

-
- Tchibansky, L., Kozek, M., Schlager, G. y Jörgi, H.P., (2003) “A purely mechanical energy storage concept for hybrid vehicle”, Institute for Machine and Process Automation, Vienna University of Technology, SAE International (2003-01-3278).
 - Timoshenko, S., (1955), “Strength of materials, Part I”, Van Nostrand, New York.
 - Timoshenko, S.T. y Gere, J.M. (1961), “Theory of elastic stability, 2º Edition”, McGraw-Hill, New York.
 - Tokei Kabushiki Ksisha (1971), Patentschrift 510 283.
 - Tse, P.C. y Lai, T.C., (1995), “An expression for the strain energy of laminated composite thin shell”, Int. J. Mech. Eng. Educ. 23(2): 169-177.
 - Turrière, E., (1939) “Une nouvelle courbe de transition pour les raccords progressifs: la radioïde pseudo-elliptique” Bulletin de la S.M.F..
 - Votta, F.A., (1963), “Constant-force springs for high output at short deflection”, Machine Design, pp. 102 – 106.
 - Votta, F. A., Jr., (1952), "The Theory and Design of Long-Deflection Constant—Force Spring Elements," Transaction of the ASME, Vol. 74, pp. 439-450.
 - Wahl, A. M., (1963), “Mechanical springs, 2nd edition”, McGraw-Hill, New York, pp 146-151.
 - Wang C. Y. and Watson L.T., (1980), “Theory of the Constant Force Spring”, Journal of Applied Mechanics, ASME Vol. 47, pp. 956-958.
 - Wantz, C., (1963), “Ressort moteur de pièce d’horlogerie”, patente CH-1876/62, Mémoire exposé n° 1876/62.
 - Wong, W.H., Tse, P.C., Lau, K.J., y Hg, Y.F., (2004), “Spring constant of fibre-reinforced plastics circular springs embedded with nickel-titanium alloy wire”, Composite Structures 65, pp 319-328.
 - Wright, D., (2008), "Introduction to Springs". Springs, Notes on Design and Analysis of Machine Elements. Dept. of Mechanical & Material Engineering, Univ. of Western Australia.
 - Xionggang, F., Biguang, Z., Zhaoxing, X. y Yicheng, Z., (1987), “Maximum potential power of unit volume of spiral power spring with barrel”, Journal of Tianjin University, n° 1.
 - Yamada, Y., (2007), “Materials for springs”, Japan Society of Spring Engineers, ISBN 978-3-540-73811-4, Springer Berlin Heidelberg New York.

- Young, W. C. y Budynas, R. G., (2002), “Roark’s Formulas for Stress and Strain”, Seventh Edition McGraw-Hill, ISBN 0-07-072542-X.
- Yukihiro, S., (2010), “Catching toy”, Patente WO2009JP71240 20091221.
- Zaugg, A. y Bilrare, C., (2010), “Breguet overcoil balance spring made of micro-machinable material”, Patent IS 2010/0110840 A1.

LISTA DE TABLAS

Tabla 1. Factor k para el cálculo del ángulo girado para power springs.	20
Tabla 2. Factores de influencia sobre el comportamiento de resortes torsionales.....	45
Tabla 3. Factores de influencia sobre la curva característica del resorte.....	47
Tabla 4. Especificaciones del resorte con curva generatriz clotoideal.....	92
Tabla 5. Comparación entre resorte clotoideal y tradicional.....	92
Tabla 6. Alternativas de diseño con sección y material variable.....	97
Tabla 7. Relación entre parámetros α y β	98
Tabla 8. Relación entre parámetros α , h_m/h_0 y ξ	98
Tabla 9. Relación entre parámetros α , β , h_m/h_0 , ξ_{\max} y ξ_{\min}	99
Tabla 10. Opciones de diseño en la selección del material de fabricación del fleje del resorte.....	107
Tabla 11. Consideraciones de bloqueo en árbol o carcasa.	120
Tabla 12. Análisis de configuraciones serie paralelo.	122
Tabla 13. Características de par e inercia para matriz y fibras.....	127
Tabla 14: Características del prototipo de bajo nivel.	132
Tabla 15: Características del prototipo de resorte de baja variabilidad del par.....	133
Tabla 16: Parámetros y sensores empleados en la instalación de ensayos.....	141
Tabla 17. Parámetros de diseño para diferentes radios equivalentes.	151
Tabla 18. Pares de bloqueo y desbloqueo para diferentes pares de bloqueo.....	151
Tabla 19. Características del prototipo de resorte de alta variabilidad del par.....	152

LISTA DE FIGURAS

Figura 1. Densidad de energía y potencia vs tiempo de descarga entre tecnologías de almacenamiento.	13
Figura 2. Diferentes tipologías de resortes espirales a torsión.	15
Figura 3. Mecanismo fusée en procesos de carga y descarga.	16
Figura 4. Resortes espirales a torsión habitualmente empleados.	16
Figura 5. Parámetros empleados en el análisis clásico de resortes espirales a torsión.	18
Figura 6. Ábacos y consideraciones de diseño para resortes espirales a torsión de potencia.	19
Figura 7. (a) Curva característica de resorte desmontado y montado sin par aplicado y con par máximo (b) Optimización de la longitud del resorte con el número de vueltas.	20
Figura 8. Parámetros de diseño para resortes espirales sin contacto entre espiras en funcionamiento.	21
Figura 9. Parámetros de diseño para resortes espirales a torsión de fuerza constante.	22
Figura 10. Fleje de sección resistente variable propuesto por Nussbaumer.	23
Figura 11. Curvaturas de fabricación del resorte propuesto por Newman.	24
Figura 12. Diseño de resorte propuesto por [Auge, 1957].	24
Figura 13. Diferentes secciones resistentes de fleje propuesto por [Kabushiki, 1971].	25
Figura 14. Diseño de resorte propuesto por [William, 1981].	25
Figura 15. Propuesta de resorte de fabricación por [Junghans, 1941].	25
Figura 16. Tipos de resorte [Neg'ator, 1979].	26
Figura 17. Propuesta de resorte con espiras bloqueadas en carcasa por Foster, 1965.	26
Figura 18. Propuesta de configuración serie de resortes por [Sadatomo, 1985].	26
Figura 19. Planteamiento analítico propuesto por [Glasser, 1964].	27
Figura 20. Descripción de los componentes de resorte espiral a torsión.	29
Figura 21. Esquema explicativo del efecto despreciable de la tracción-compresión frente al flector.	31
Figura 22. Ángulo girado por la sección del resorte y contribución general del cambio.	32
Figura 23. Parámetros de la formulación de resortes.	32

Figura 24. Curva característica de resorte con módulo resistente constante y curvaturas del fleje entre árbol y carcasa.....	35
Figura 25. Representación gráfica de un resorte con curvatura en carcasa mayor que la espira más externa..	36
Figura 26. Representación gráfica de un las espiras del resorte para diferentes pares de funcionamiento.	36
Figura 27. Representación gráfica de un resorte con zona de tránsito de espiras entre carcasa y árbol.....	37
Figura 28. Existencia de espiras que no trabajan en árbol o carcasa.....	38
Figura 29. Existencia de espiras con optimización de su funcionamiento.	39
Figura 30. Gráfica que relaciona par, curvaturas y longitud del fleje.	40
Figura 31. Espiral y variación de curvatura con longitud para Arquímedes y exponencial grado 1,2.....	42
Figura 32. Curvas características para espiral exponencial y de Arquímedes.....	43
Figura 33. Variación de la representación del resorte con aumento de la inercia de la sección del fleje.....	44
Figura 34. Forma de las gráficas curvatura – par para resortes de par variable y de baja varaibilidad.....	47
Figura 35. Flujograma del procedimiento de diseño de resortes espirales a torsión.	50
Figura 36. Variación de la curva par-curvatura por efecto del espesor del fleje.....	58
Figura 37. Comparación curva característica con modelo con espesor y sin espesor y radios equivalentes. ..	60
Figura 38. Diagrama de cálculo numérico de la curva característica con los efectos del espesor del fleje.	61
Figura 39. Influencia del radio de la carcasa sobre curva característica.	64
Figura 40. Influencia del radio de la carcasa sobre ángulo girado por las espiras bloqueadas en la carcasa. ..	64
Figura 41. Influencia del radio de la carcasa sobre ángulo girado por las espiras bloqueadas en el árbol.....	65
Figura 42. Influencia del radio de la carcasa sobre ángulo girado por las espiras libres.....	66
Figura 43. Influencia del radio del árbol sobre curva característica.....	66
Figura 44. Influencia del radio del árbol sobre ángulo girado por las espiras bloqueadas en la carcasa.	67
Figura 45. Influencia del radio del árbol sobre ángulo girado por las espiras libres.....	67
Figura 46. Influencia del radio del árbol sobre ángulo girado por las espiras bloqueadas en el árbol.	68
Figura 47. Influencia del cambio de curvatura en diferentes parámetros de diseño.....	69
Figura 48. Dimensiones de la carcasa en función del cambio de curvatura.	69

Figura 49. Influencia del par de diseño en diferentes parámetros de diseño.	70
Figura 50. Porcentaje de la energía respecto a la potencial en función de la variabilidad del par.	70
Figura 51. Influencia del ángulo girado con la longitud del fleje y el modelo con o sin espesor.....	71
Figura 52. Relación entre curvaturas y pares en bloqueo en carcasa.....	72
Figura 53. Cálculo del desaprovechamiento de energía por bloqueo en dos sumandos.	75
Figura 54. Gráfica de energías de bloqueo y montaje para la obtención fuerza de contacto.....	76
Figura 55. Gráfica par - curvatura para la obtención fuerza de contacto.....	76
Figura 56. Representación grafica del resorte.	81
Figura 57. Ángulo girado en función del par aplicado.	83
Figura 58. Representación de los estados de funcionamiento del resorte (a)optimizado y (b) sin optimizar...84	
Figura 59. Relación entre parámetros de diseño b, L0 y ξ	87
Figura 60. Relación entre parámetros de diseño b, RL y peso con ξ	88
Figura 61. Resortes espirales a torsión de uso habitual y curva característica.	92
Figura 62. Relación entre h_m/h_0 y ξ	99
Figura 63. Relación entre α y ξ y entre β y ξ	100
Figura 64. Zona de validez en la relación entre h_m/h_0 y ξ	100
Figura 65. Curva característica de curvaturas y par ángulo girado del resorte.....	108
Figura 66. Curva característica del resorte diseñado.	108
Figura 67. Espiral del resorte fabricado y con par de 225 Nm.	109
Figura 68. Curva par ángulo girado y curvaturas por efecto del espesor del fleje.....	110
Figura 69. Influencia del espesor del fleje sobre los diferentes ángulos girados.....	110
Figura 70. Influencia del espesor del fleje sobre curva característica.	111
Figura 71. Influencia del espesor en el ángulo girado por las espiras bloqueadas en la carcasa.	112
Figura 72. Influencia del espesor sobre ángulo girado por las espiras bloqueadas en el árbol.....	112
Figura 73. Influencia del espesor del fleje sobre ángulo girado por las espiras libres.....	113
Figura 74. Curva característica de curvaturas y par ángulo girado del resorte.....	115

Figura 75. Curva característica del resorte.	116
Figura 76. Representación geométrica del resorte fabricado y límites de constancia del par.	117
Figura 77. Curva par ángulo girado y curvaturas por efecto del espesor del fleje.	118
Figura 78. Influencia del espesor del fleje para el resorte de baja variabilidad del par.	118
Figura 79. Acoplamiento de cuatro resortes serie y dos paralelos.	121
Figura 80. Relación entre módulo de Young y tensión máxima específica [Ashby, 1999].	123
Figura 81. Factores de forma de diferentes secciones resistentes [Ashby, 1999].	125
Figura 82. Relación densidad – módulo de elasticidad y límite de fatiga en distintos materiales [Ashby, 1999].	126
Figura 83. Relación tenacidad a fractura E y σ_{admC} para distintos materiales [Ashby, 1999].	126
Figura 84. Diseño CAD y fabricación del prototipo de bajo nivel.	132
Figura 85. Resultado del ensayo del prototipo de bajo nivel.	133
Figura 86. Resorte de fabricación y deformada a par nominal.	134
Figura 87. Flectores y esfuerzos cortantes.	135
Figura 88. Máxima tensión a flexión y máxima tensión.	135
Figura 89. Perfil de temperaturas para el curado del resorte.	136
Figura 90. Pegado de la primera y de las siguientes capas de fibra de vidrio sobre el molde.	136
Figura 91. Molde y resorte fabricado.	137
Figura 92. Diagrama de funciones principales del banco de ensayos.	138
Figura 93. Trinquete de seguridad del resorte (diseño, cálculo y fabricación).	138
Figura 94. Soporte del extremo del resorte en la carcasa.	139
Figura 95. Esquemas de la instalación eléctrica y de control del banco de ensayos.	140
Figura 96. Diseño del banco de ensayos.	141
Figura 97. Comparación curva característica en proceso de carga.	144
Figura 98. Tensión en la galga situada a 5m de la carcasa.	147
Figura 99. Par de descarga.	148

Figura 100. Potencia de descarga.	148
Figura 101. Pérdidas por viscoelasticidad en diferentes materiales [Ashby, 1999].	149
Figura 102. Relación entre la velocidad del árbol rápido y el tiempo.	150
Figura 103. Repetibilidad en los ensayos par ángulo girado.	151
Figura 104. Curva característica con resorte con modelo de radios equivalentes al efecto del espesor.	152
Figura 105. Proceso de montaje del molde del resorte de par constante.	153
Figura 106. Perfil de temperaturas para el curado del resorte.	153
Figura 107. Imagen del resorte fabricado en la carcasa.	154
Figura 108. Montaje final del resorte para ensayo de par.	154
Figura 109. Comparación de curva par ángulo girado según el espesor del fleje.	155
Figura 110. Comparación de curva par - ángulo girado, modelo con espesor y valores ensayados.	156
Figura 111. Curvatura obtenida por el método analítico de resolución.	157
Figura 112. Ángulo total girado obtenido por el método analítico de resolución.	158
Figura 113. Ángulo girado por las espiras bloqueadas en la carcasa obtenido por el método analítico de resolución.	158
Figura 114. Ángulo girado por las espiras libres obtenido por el método analítico de resolución.	159
Figura 115. Variación de los ángulos girados (libre y bloqueados en árbol y carcasa) en función del par.	159
Figura 116. Ecuaciones en desarrollo polinómico por tramos de los ángulos girados en función del par.	160
Figura 117. Variación de $d\beta/dM$ y $d^2\beta/dM^2$ con el par.	160
Figura 118. Variación de $d\Phi/dM$ y $d^2\Phi/dM^2$ con el par.	161
Figura 119. Gráficas energía y punto equilibrio de formación para resorte de alta variabilidad del par.	162

ABREVIATURAS Y ACRÓNIMOS.

A lo largo de la presente Tesis Doctoral ha sido utilizada diferente simbología para las variables de análisis y representación del modelo de los resortes espirales que se enumeran a continuación:

d : diámetro del árbol.

D : diámetro de la carcasa.

L : longitud del fleje.

t : espesor del fleje.

k : parámetro de corrección experimental de resortes espirales según literatura clásica.

C_{HA} : curvatura para el par M_A para longitud bloqueada en la carcasa .

C_{HB} : curvatura para el par M_B para longitud bloqueada en la carcasa .

C_{SA} : curvatura para el par M_A para longitud bloqueada en el árbol.

C_{SA} : curvatura para el par M_A para longitud bloqueada en el árbol .

l_{BL} : longitud bloqueada en el árbol .

l_B : longitud bloqueada en la carcasa .

$\Delta\Phi$: cambio de curvatura del resorte.

Φ_1 : ángulo girado por el resorte con un par $M(I+\varepsilon)$.

β_1 : ángulo bloqueado en la carcasa con un par $M(I+\varepsilon)$.

θ_1 : ángulo bloqueada en el árbol con un par $M(I+\varepsilon)$.

ϕ_1 : ángulo girado por las espiras libres con un par $M(I+\varepsilon)$.

Φ_2 : ángulo girado por el resorte con un par $M(I-\varepsilon)$.

β_2 : ángulo bloqueado en la carcasa con un par $M(I-\varepsilon)$.

θ_2 : ángulo bloqueada en el árbol con un par $M(I-\varepsilon)$.

ϕ_2 : ángulo girado por las espiras libres con un par $M(I-\varepsilon)$.

$\Delta\phi$: cambio de curvatura de cada sección del resorte.

$M(l)$: par aplicado en función de la longitud.

$E(l)$: módulo de Young en función de la longitud.

$I(l)$: momento de inercia en función de la longitud.

$\rho(l)$: radio de curvatura en función de la longitud.

$C(l)$: curvatura en función de la longitud.

$C_0(l)$: curvatura inicial, sin par aplicado, en función de la longitud.

ε : variabilidad del par respecto al nominal.

$M(1+\varepsilon)$: límite superior de la zona de constancia de par.

$M(1-\varepsilon)$: límite inferior de la zona de constancia de par.

M_s : momento de bloqueo sobre el árbol de la primera espira del fleje.

M_e : momento en el que la última sección del fleje desbloqueado en la carcasa.

$f_1(\beta(M), M)$: función auxiliar para calcular la variación de ángulo bloqueado en la carcasa con el par.

$f_2(\theta(M), M)$: función auxiliar para calcular la variación de ángulo bloqueado en el árbol con el par.

l_{BL} : longitud bloqueada en el árbol en el modelo con espesor.

l_B : longitud bloqueada en la carcasa en el modelo con espesor.

W : energía almacenada por deformación elástica por el resorte.

U/P : densidad de energía.

ρ : densidad.

σ_{adm} : tensión máxima admisible.

τ_{adm} : tensión máxima admisible a cortadura.

$C_F(l)$: curvatura del fleje de fabricación.

$C_M(l)$: curvatura del fleje con par aplicado.

L_0 : longitud inicial total de fleje.

a : parámetro independiente de la curva radioidal.

b : parámetro dependiente de la longitud de la curva radioidal.

ξ : variación del módulo resistente a lo largo de la longitud del fleje.

ξ_{\max} : variación máxima del módulo resistente a lo largo de la longitud del fleje.

ξ_{\min} : variación mínima del módulo resistente a lo largo de la longitud del fleje.

β : ángulo de bloqueo en el árbol.

θ : ángulo de bloqueo en la carcasa

R : radio de la carcasa.

R_L : radio del árbol.

δ : semisuma de los radios de árbol y carcasa.

γ : semidiferencia de los radios de árbol y carcasa.

σ_F : tensión máximo de flexión de la sección del fleje.

σ_T : tensión máximo de tracción de la sección del fleje.

e : espesor de la sección del fleje para análisis de tensión flexión vs tracción.

h : anchura de la sección del fleje para análisis de tensión flexión vs tracción.

r : radio de la sección del fleje para análisis de tensión flexión vs tracción.

M_s : momento de bloqueo de la primera espira del fleje sobre el árbol.

M_e : momento de desbloqueo de la última espira del fleje sobre la carcasa.

M_F : par soportados por las fibras.

M_M : par soportados por la matriz.

I_F : momento de inercia de las fibras.

I_M : momento de inercia de la matriz.

φ_0 : ángulo girado total por el resorte sin carga.

φ^* : ángulo girado por la longitud bloqueada del resorte.

h_m : valor medio del espesor de la espira.

k : coeficiente de seguridad en el cálculo resistente de espiras.

σ_R : límite de rotura del material.

σ_0 : límite de elástico del material.

$\beta_0 - \beta$: bloqueo relativo en el árbol.

θ_0 - θ : bloqueo relativo en la carcasa

n_0 : número de espiras del resorte sin carga.

α : coeficiente de variación de la altura a lo largo de la longitud del fleje.

β : coeficiente de variación del espesor a lo largo de la longitud del fleje.

h_0 : semi-espesor del fleje en la posición inicial o carcasa.

h_L : semi-espesor del fleje en la posición final o árbol.

e_0 : altura del fleje en la posición inicial o carcasa.

e_L : altura del fleje en la posición final o árbol.

E_0 : módulo de elasticidad en la posición inicial o carcasa.

E_L : módulo de elasticidad en la posición final o árbol.

σ_0 : tensión máxima en la posición inicial o carcasa.

σ_L : tensión máxima en la posición final o árbol.

r : relación entre radio del árbol y de la carcasa.

Ψ : coeficiente de relación de μ , ε , ξ y γ .